

Modelowanie Systemów

MCR036211W

Eugeniusz Rosołowski

e-mail: eugeniusz.rosolowski@pwr.edu.pl

www.rose.pwr.wroc.pl

podręcznik:

**KOMPUTEROWE METODY ANALIZY ELEKTROMAGNETYCZNYCH
STANÓW PRZEJŚCIOWYCH**

http://zas.ie.pwr.wroc.pl/ER/Komp_metody.pdf

Modelowanie Systemów

Wykład: 15h, środa, 13.15, sala 408 D-20

Zaliczenie: kolokwium zaliczeniowe na ostatnim wykładzie
(1 termin poprawkowy).

Materiały do wykładu:

<http://www.rose.pwr.wroc.pl/>

Modelowanie Systemów

- **Rola modelowania w życiu codziennym**
- **Funkcja modelowania w fizyce i nauce**

„Zbiór modeli matematycznych odnoszących się do jakiejś dziedziny fizyki tworzy jej teorię”.

Weryfikacja zamkniętego zbioru modeli odnoszących się do badanego zjawiska/systemu prowadzi do powstania obowiązującej teorii. Procedurę tę można przedstawić za pomocą znanego schematu:

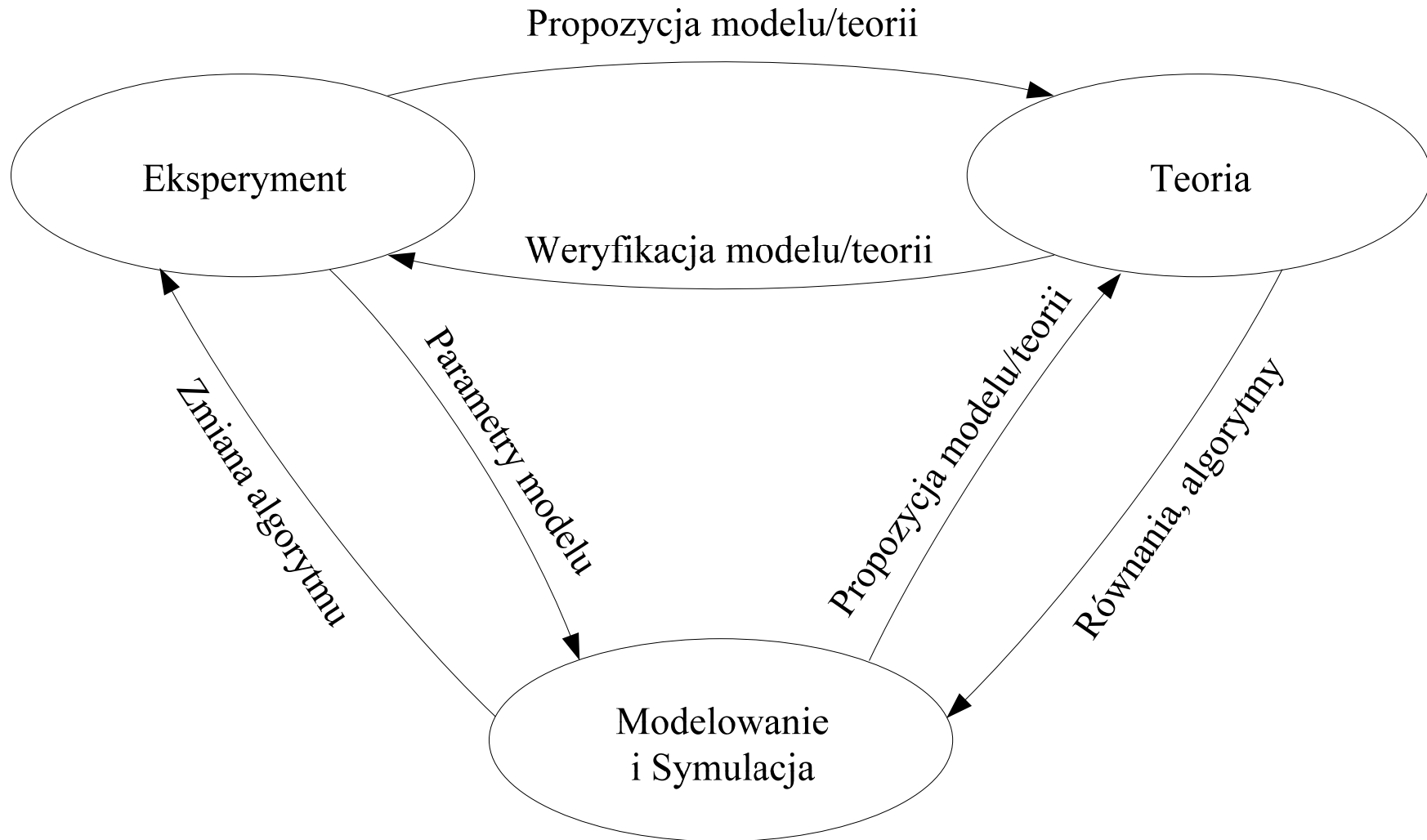
Teoria (koncepcja) $\leftrightarrow$ eksperyment (weryfikacja)

W powyższym schemacie model (matematyczny) jest elementem tworzącej się teorii.

Modelowanie Systemów

Rozwój techniki komputerowej doprowadził do powstania bardzo wygodnych i elastycznych narzędzi służących do symulacji funkcjonowania modeli. W tym kontekście używa się pojęcia **modelu komputerowego**, przez co należy rozumieć odpowiedni algorytm funkcjonowania modelu. Na podstawie tego algorytmu tworzone są komputerowe programy do wirtualnej realizacji modelu (w środowisku komputerowym).

Modelowanie Systemów



Modelowanie Systemów

Główny podział modeli przebiega w zależności od sposobu ich inicjacji (pobudzania) i natury zachodzących procesów:

- modele procesów zachodzących względem czasu (ciągłego lub dyskretnego);
- modele procesów rozpatrywanych względem inicjujących je zdarzeń.

Modelowanie Systemów

Procesy opisywane względem czasu są zazwyczaj dobrze uporządkowane i 'przewidywalne'. Kolejne ich stany zazwyczaj łączą się ze stanami poprzednimi. Ich opis analityczny może bazować na podejściu deterministycznym (matematyczny model deterministyczny) lub probabilistycznym, gdy zakłada się losowy charakter opisujących je funkcji lub ich parametrów.

Procesy inicjowane zdarzeniami są z natury losowe (jeśli pominąć przypadek, gdy zdarzenia zachodzą w sposób uporządkowany względem czasu). Zarówno liczba zdarzeń wejściowych w określonej jednostce czasu, jak i długość okresu upływającego pomiędzy kolejnymi zdarzeniami są wielkościami losowymi.

Modelowanie Systemów

W przypadku procesów opisywanych względem czasu, mamy do czynienia ze **zjawiskami dynamicznymi**, które opisują relacje wejście-wyjście elementów systemu w czasie, pokazując także związane z nimi przebiegi.

System dynamiczny charakteryzuje się tym, że jego odpowiedź na dane wymuszenie ma charakter zmienny w czasie. Ponadto, odpowiedź jest funkcją zarówno bieżącego, wymuszenia, jak również historii procesu. **Model analityczny** (matematyczny) jest określony za pomocą odpowiednich równań lub innych adekwatnych relacji, jak wykresy, czy tabele, które opisują system z pewnym przyjętym przybliżeniem. Jeśli relacje te są zapisane w formie programów komputerowych, to mówimy o **komputerowym modelu** systemu.

Modelowanie Systemów

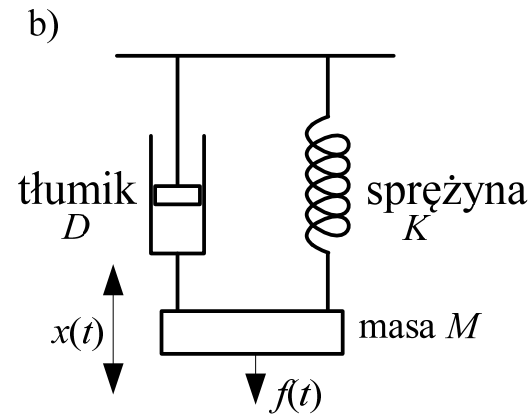
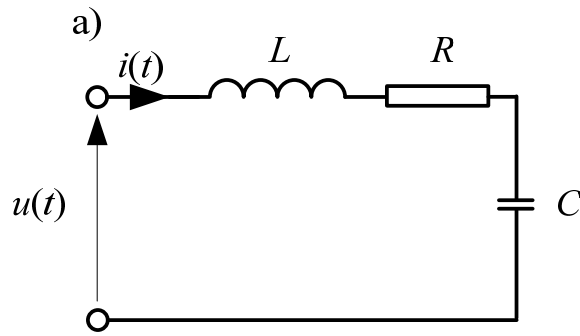
Model matematyczny:

- *model ciągły* względem czasu
- *dyskretny model systemu*
- *model cyfrowy*

Dynamiczny model komputerowy jest zawsze modelem cyfrowym: z dyskretnym czasem i określoną dokładnością reprezentacji zmiennych procesu i jego parametrów.

Modelowanie Systemów

Model dynamiczny

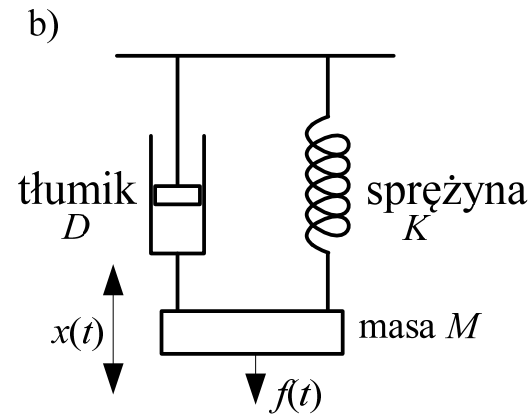
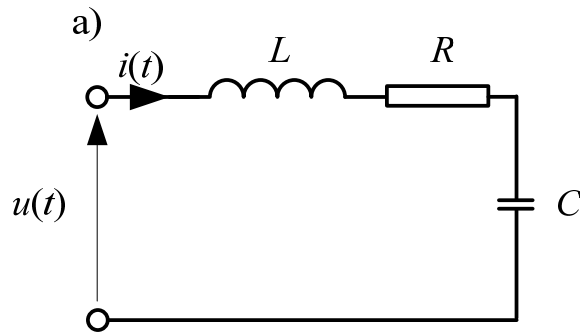


$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

$$L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = 0$$

Modelowanie Systemów

Model dynamiczny

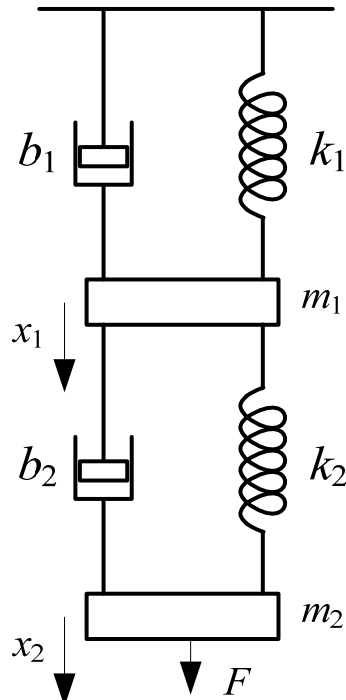


$$f(t) = Dv(t) + M \frac{dv(t)}{dt} + K \int v(t) dt$$

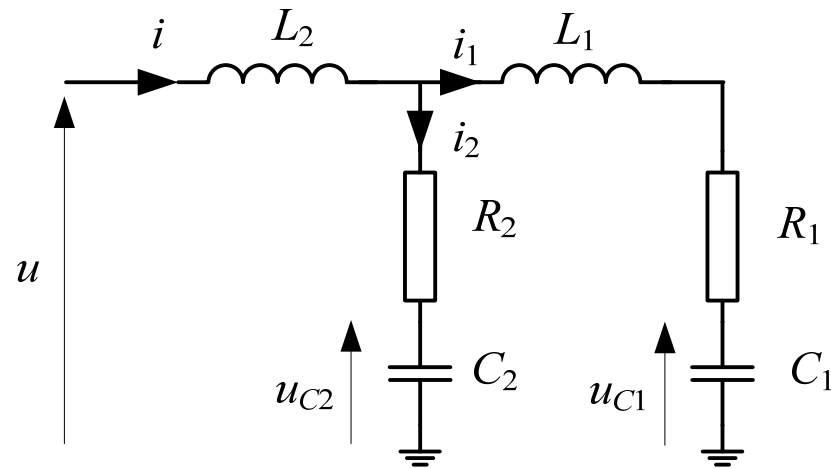
$$M \frac{d^2 v(t)}{dt^2} + D \frac{dv(t)}{dt} + Kv(t) = 0$$

Modelowanie Systemów

Równoważność modeli:



$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{dt} &= v_{m2} & \frac{dx_1}{dt} &= v_1 \\ \frac{dv_{m2}}{dt} &= -\frac{1}{m_2} k_2 (x_2 - x_1) - \frac{1}{m_2} b_2 (v_{m2} - v_1) + \frac{1}{m_2} F \\ \frac{dv_1}{dt} &= \frac{k_2}{m_1} x_2 + \frac{b_2}{m_1} v_2 - \frac{k_2}{m_1} x_1 - \frac{b_2}{m_1} v_1 - \frac{k_1}{m_1} x_1 - \frac{b_1}{m_1} v_1 \end{aligned}$$



$$u = L_2 \frac{di}{dt} + R_2 i_2 + u_{C2}$$

$$R_2 i_2 + u_{C2} = L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + u_{C1}$$

$$i_2 = C_2 \frac{du_{C2}}{dt}, \quad i_1 = C_1 \frac{du_{C1}}{dt}, \quad i = i_1 + i_2$$

Modelowanie Systemów

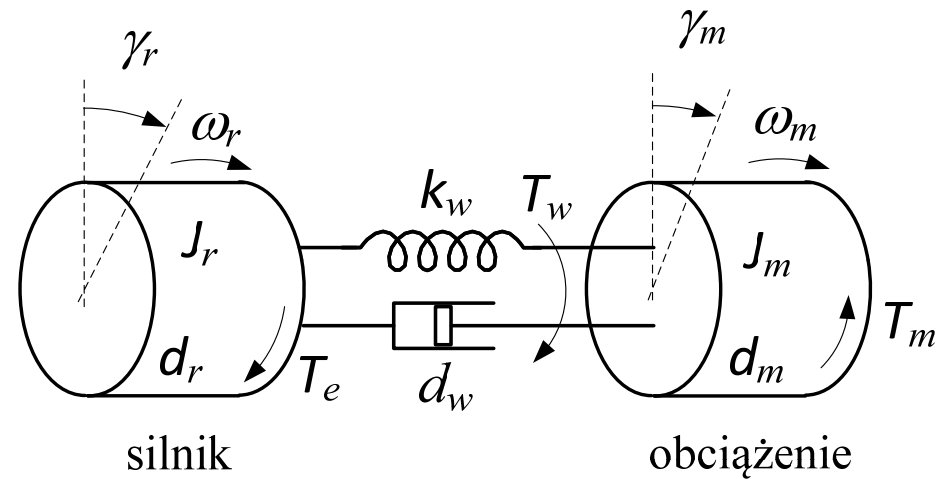
Równoważność modeli:

Równoważność układu mechanicznego posuwistego z układem elektrycznym

Układ mechaniczny	Układ elektryczny
siła F (N)	napięcie u (V)
prędkość v (m/s)	prąd i (A)
przesunięcie x (m)	ładunek elektryczny Q ($1C = 1V \cdot 1F$)
masa m (kg)	indukcyjność L (H)
współczynnik sprężystości k (N/m)	odwrotność pojemności $1/C$ (1/F)
współczynnik tłumienia b (Ns/m)	rezystancja R (Ω)
Podstawowe relacje: masa: $F = m \frac{dv}{dt}$, $F = \frac{dp}{dt}$, $p = mv$ sprężyna: $v = \frac{1}{k} \frac{dF}{dt}$, $v = \frac{dx}{dt}$, $F = kx$ tłumik: $F = bv$	Podstawowe relacje: cewka: $u = L \frac{di}{dt}$, $u = \frac{d\psi}{dt}$, $\psi = Li$ kondensator: $i = C \frac{du}{dt}$, $i = \frac{dQ}{dt}$, $u = \frac{1}{C} Q$ opornik: $u = Ri$

Modelowanie Systemów

Układ mechaniczny wirujący



$$J \frac{d\omega}{dt} + d\omega = T_e - T_m$$

Sprzęgło:

$$d_w \frac{d(\gamma_r - \gamma_m)}{dt} + k_w (\gamma_r - \gamma_m) = T_w$$

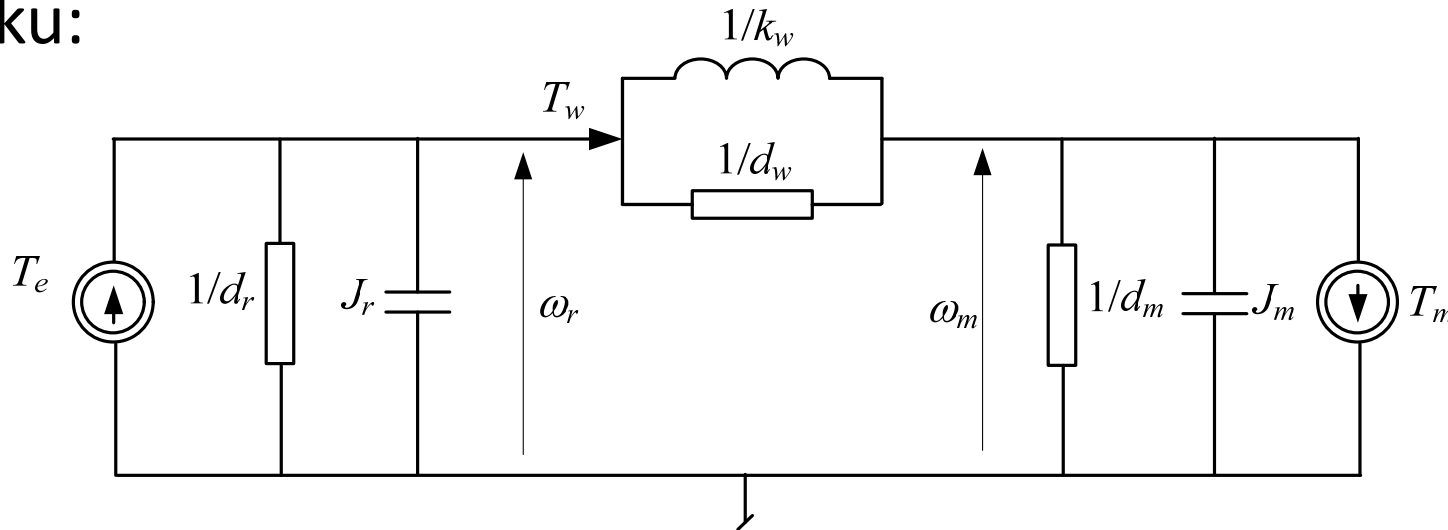
Modelowanie Systemów

Równoważność układu obrotowego z układem elektrycznym

Układ mechaniczny obrotowy	Układ elektryczny
moment inercji J ($\text{kg}\cdot\text{m}^2$)	pojemność C (F)
moment obrotowy T ($\text{N}\cdot\text{m}$)	prąd i (A)
prędkość kątowna ω (rad/s)	napięcie u (V)
przesunięcie kątowe γ (rad)	strumień magnetyczny ψ (Vs)
współczynnik sprężystości k ($\text{N}\cdot\text{m}/\text{rad}$)	odwrotność indukcyjności $1/L$ (1/H)
współczynnik tłumienia skrętu d ($\text{N}\cdot\text{m s}/\text{rad}$)	przewodność $1/R$ ($\text{S} = 1/\Omega$)
Podstawowe relacje: moment inercji: $T = J \frac{d\omega}{dt} = J \frac{d^2\gamma}{dt^2}$, $\omega = \frac{d\gamma}{dt}$ sprężyna skrętna $T = k\gamma$ tłumik: $T = d\omega = d \frac{d\gamma}{dt}$	Podstawowe relacje: kondensator: $i = C \frac{du}{dt} = C \frac{d^2\psi}{dt^2}$, $u = \frac{d\psi}{dt}$ cewka: $i = \frac{1}{L} \psi$ przewodność $i = \frac{1}{R} u = \frac{1}{R} \frac{d\psi}{dt}$

Modelowanie Systemów

Zgodnie z zasadą równoważności, układ wirujący może być przedstawiony w postaci obwodu elektrycznego, jak na rysunku:



Wniosek: jak widać, zasady tworzenia modeli dynamiki układów mechanicznych i elektrycznych są podobne. **Zasada równoważności modeli** może być zastosowana także do innych zjawisk fizycznych.

Modelowanie Systemów

W dalszej części wykładu ograniczymy rozważania głównie do modeli układów elektrycznych (sieci elektrycznych).

Stosowane tu są dwa podejścia do zagadnienia modelowania cyfrowego:

1. Tworzenie cyfrowych modeli elementów (jak R , L , C) sieci elektrycznej, z których są następnie budowane i rozwiązywane modele sieci złożonych.
2. Tworzenie modeli matematycznych złożonych sieci elektrycznych i ich rozwiązywanie odpowiednimi metodami numerycznymi.

Pokrótce zapoznamy się z obu tymi metodami.

