

Modelowanie Cyfrowe

EMR016211W

Eugeniusz Rosołowski

e-mail: eugeniusz.rosolowski@pwr.edu.pl

www.rose.pwr.edu.pl

podręcznik:

**KOMPUTEROWE METODY ANALIZY ELEKTROMAGNETYCZNYCH
STANÓW PRZEJŚCIOWYCH**

https://rose.pwr.edu.pl/dyd/komp_metody/Komp_metody.pdf

Modelowanie Cyfrowe

Wykład: 15h, środa, 9.15, sala 406 D-20

Zaliczenie: kolokwium zaliczeniowe na ostatnim wykładzie:
4 maja, środa, 9.15-10.00, (1 termin poprawkowy)

Materiały do wykładu:

<https://www.rose.pwr.edu.pl/>

Modelowanie Cyfrowe

Syllabus

1. Omówienie podstawowych zasad tworzenia modelu matematycznego prostego układu mechanicznego i elektrycznego. Przegląd stosowanych komputerowych narzędzi symulacyjnych. Zasady przygotowania modelu zadanego układu: parametry układu, warunki początkowe, parametry symulacji.
2. Modele cyfrowe liniowych elementów RLC o parametrach skupionych. Błędy cyfrowej aproksymacji.
3. Modele złożonych gałęzi utworzonych z elementów RLC.
4. Model cyfrowy linii jednofazowej z parametrami rozłożonymi.
5. Tworzenie i rozwiązywanie równań sieciowych. Określanie warunków początkowych. Modelowanie łączników.
6. Modelowanie elementów nieliniowych sieci RLC
7. Modelowanie układów elektromechanicznych.
8. Kolokwium zaliczeniowe

Modelowanie Cyfrowe

- **Rola modelowania w życiu codziennym**
- **Funkcja modelowania w fizyce i nauce**

„Zbiór modeli matematycznych odnoszących się do jakiejś dziedziny fizyki tworzy jej teorię”.

Weryfikacja zamkniętego zbioru modeli odnoszących się do badanego zjawiska/systemu prowadzi do powstania obowiązującej teorii. Procedurę tę można przedstawić za pomocą znanego schematu:

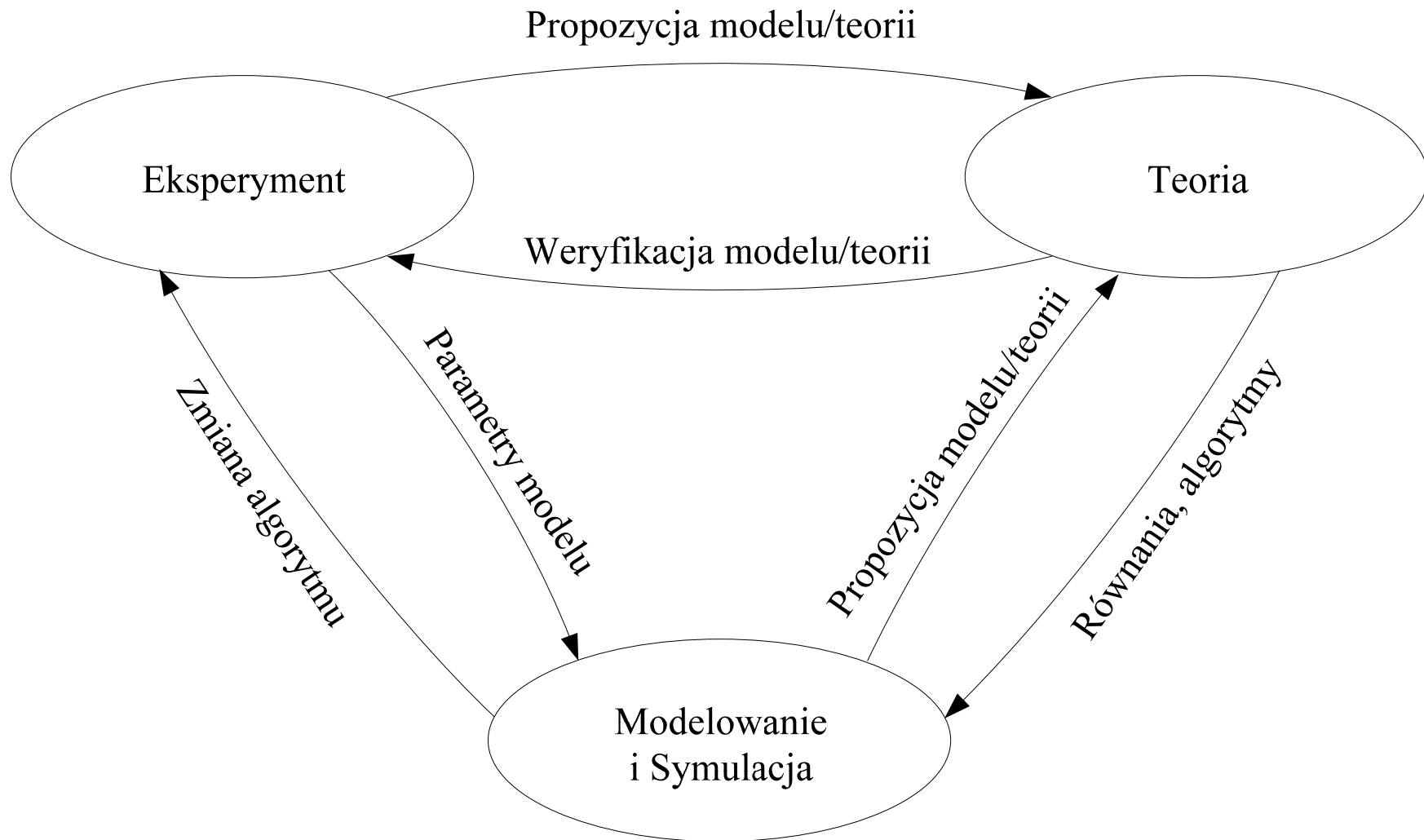
Teoria (koncepcja) \leftrightarrow eksperyment (weryfikacja)

W powyższym schemacie model (matematyczny) jest elementem tworzącej się teorii.

Modelowanie Cyfrowe

Rozwój techniki komputerowej doprowadził do powstania bardzo wygodnych i elastycznych narzędzi służących do symulacji funkcjonowania modeli. W tym kontekście używa się pojęcia **modelu komputerowego**, przez co należy rozumieć odpowiedni algorytm funkcjonowania modelu. Na podstawie tego algorytmu tworzone są komputerowe programy do wirtualnej realizacji modelu (w środowisku komputerowym).

Modelowanie Cyfrowe



Modelowanie Cyfrowe

Główny podział modeli przebiega w zależności od sposobu ich inicjacji (pobudzania) i natury zachodzących procesów:

- modele procesów zachodzących względem czasu (ciągłego lub dyskretnego);
- modele procesów rozpatrywanych względem inicjujących je zdarzeń.

Modelowanie Cyfrowe

Procesy opisywane względem czasu są zazwyczaj dobrze uporządkowane i 'przewidywalne'. Kolejne ich stany zazwyczaj łączą się ze stanami poprzednimi. Ich opis analityczny może bazować na podejściu deterministycznym (matematyczny model deterministyczny) lub probabilistycznym, gdy zakłada się losowy charakter opisujących je funkcji lub ich parametrów.

Procesy inicjowane zdarzeniami są z natury losowe (jeśli pominąć przypadek, gdy zdarzenia zachodzą w sposób uporządkowany względem czasu). Zarówno liczba zdarzeń wejściowych w określonej jednostce czasu, jak i długość okresu upływającego pomiędzy kolejnymi zdarzeniami są wielkościami losowymi.

Modelowanie Cyfrowe

W przypadku procesów opisywanych względem czasu, mamy do czynienia ze **zjawiskami dynamicznymi**, które opisują relacje wejście-wyjście elementów systemu w czasie, pokazując także związane z nimi przebiegi.

System dynamiczny charakteryzuje się tym, że jego odpowiedź na dane wymuszenie ma charakter zmienny w czasie. Ponadto, odpowiedź jest funkcją zarówno bieżącego wymuszenia, jak również historii procesu. **Model analityczny** (matematyczny) jest określony za pomocą odpowiednich równań lub innych adekwatnych relacji, jak wykresy, czy tabele, które opisują system z pewnym przyjętym przybliżeniem. Jeśli relacje te są zapisane w formie programów komputerowych, to mówimy o **komputerowym modelu** systemu.

Modelowanie Cyfrowe

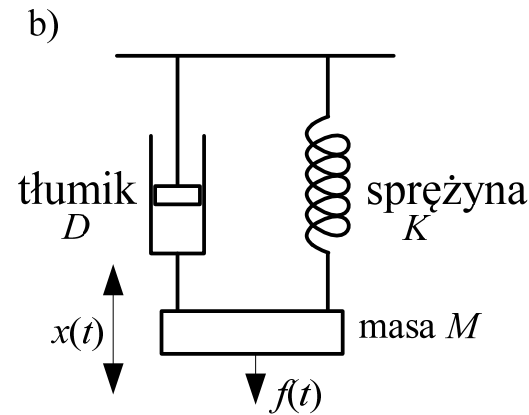
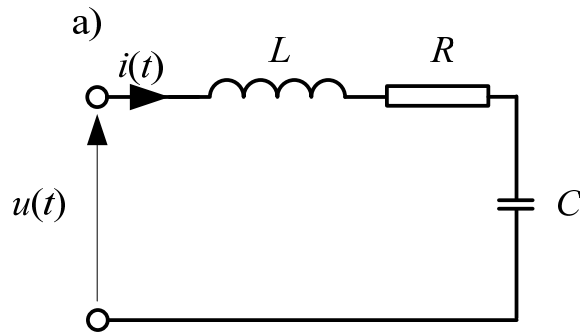
Model matematyczny:

- *model ciągły* względem czasu
- *dyskretny model systemu*
- *model cyfrowy*

Dynamiczny model komputerowy jest zawsze modelem cyfrowym: z dyskretnym czasem i określoną dokładnością reprezentacji zmiennych procesu i jego parametrów.

Modelowanie Cyfrowe

Model dynamiczny

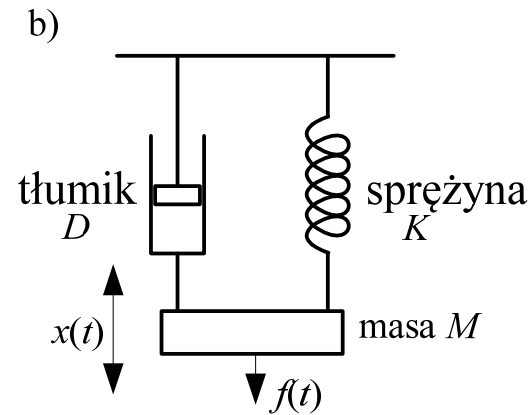
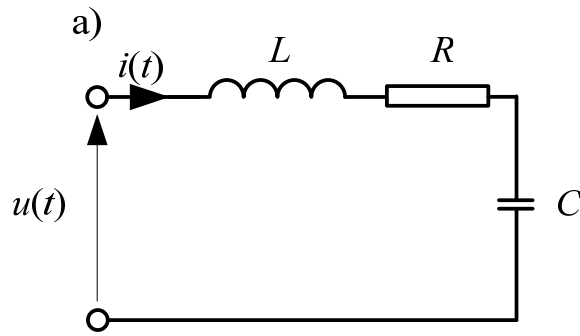


$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

$$L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = 0$$

Modelowanie Cyfrowe

Model dynamiczny

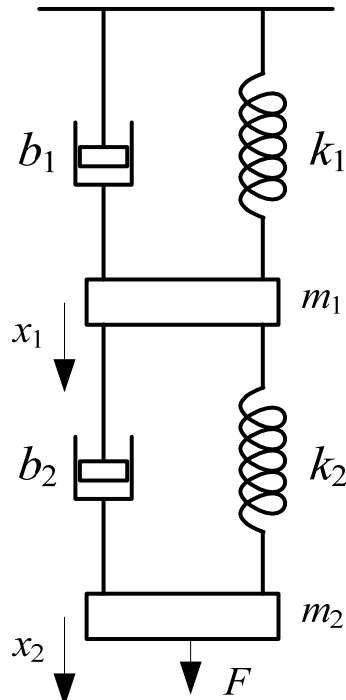


$$f(t) = Dv(t) + M \frac{dv(t)}{dt} + K \int v(t) dt$$

$$M \frac{d^2 v(t)}{dt^2} + D \frac{dv(t)}{dt} + Kv(t) = 0$$

Modelowanie Cyfrowe

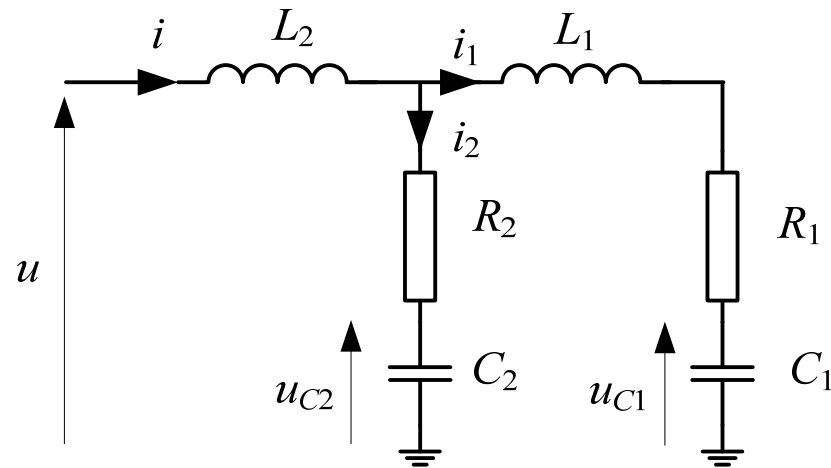
Równoważność modeli:



$$\frac{dx_2}{dt} = v_{m2} \quad \frac{dx_1}{dt} = v_1$$

$$\frac{dv_{m2}}{dt} = -\frac{1}{m_2} k_2 (x_2 - x_1) - \frac{1}{m_2} b_2 (v_{m2} - v_1) + \frac{1}{m_2} F$$

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{k_2}{m_1} x_2 + \frac{b_2}{m_1} v_2 - \frac{k_2}{m_1} x_1 - \frac{b_2}{m_1} v_1 - \frac{k_1}{m_1} x_1 - \frac{b_1}{m_1} v_1$$



$$u = L_2 \frac{di}{dt} + R_2 i_2 + u_{C2}$$

$$R_2 i_2 + u_{C2} = L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + u_{C1}$$

$$i_2 = C_2 \frac{du_{C2}}{dt}, \quad i_1 = C_1 \frac{du_{C1}}{dt}, \quad i = i_1 + i_2$$

Modelowanie Cyfrowe

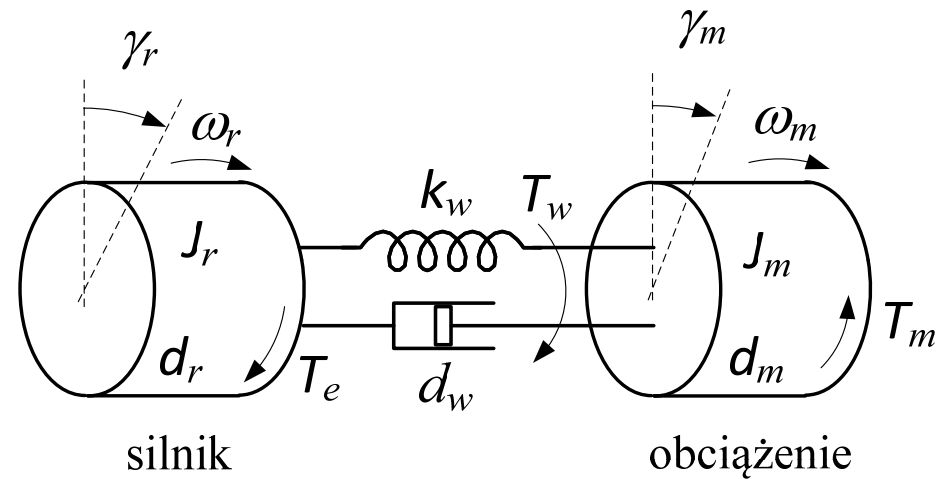
Równoważność modeli:

Równoważność układu mechanicznego posuwistego z układem elektrycznym

| Układ mechaniczny | Układ elektryczny |
|---|---|
| siła F (N) | napięcie u (V) |
| prędkość v (m/s) | prąd i (A) |
| przesunięcie x (m) | ładunek elektryczny Q ($1C = 1V \cdot 1F$) |
| masa m (kg) | indukcyjność L (H) |
| współczynnik sprężystości k (N/m) | odwrotność pojemności $1/C$ (1/F) |
| współczynnik tłumienia b (Ns/m) | rezystancja R (Ω) |
| Podstawowe relacje: masa: $F = m \frac{dv}{dt}$, $F = \frac{dp}{dt}$, $p = mv$ sprężyna: $v = \frac{1}{k} \frac{dF}{dt}$, $v = \frac{dx}{dt}$, $F = kx$ tłumik: $F = bv$ | Podstawowe relacje: cewka: $u = L \frac{di}{dt}$, $u = \frac{d\psi}{dt}$, $\psi = Li$ kondensator: $i = C \frac{du}{dt}$, $i = \frac{dQ}{dt}$, $u = \frac{1}{C} Q$ opornik: $u = Ri$ |

Modelowanie Cyfrowe

Układ mechaniczny wirujący



$$J \frac{d\omega}{dt} + d\omega = T_e - T_m$$

Sprzęgło:

$$d_w \frac{d(\gamma_r - \gamma_m)}{dt} + k_w (\gamma_r - \gamma_m) = T_w$$

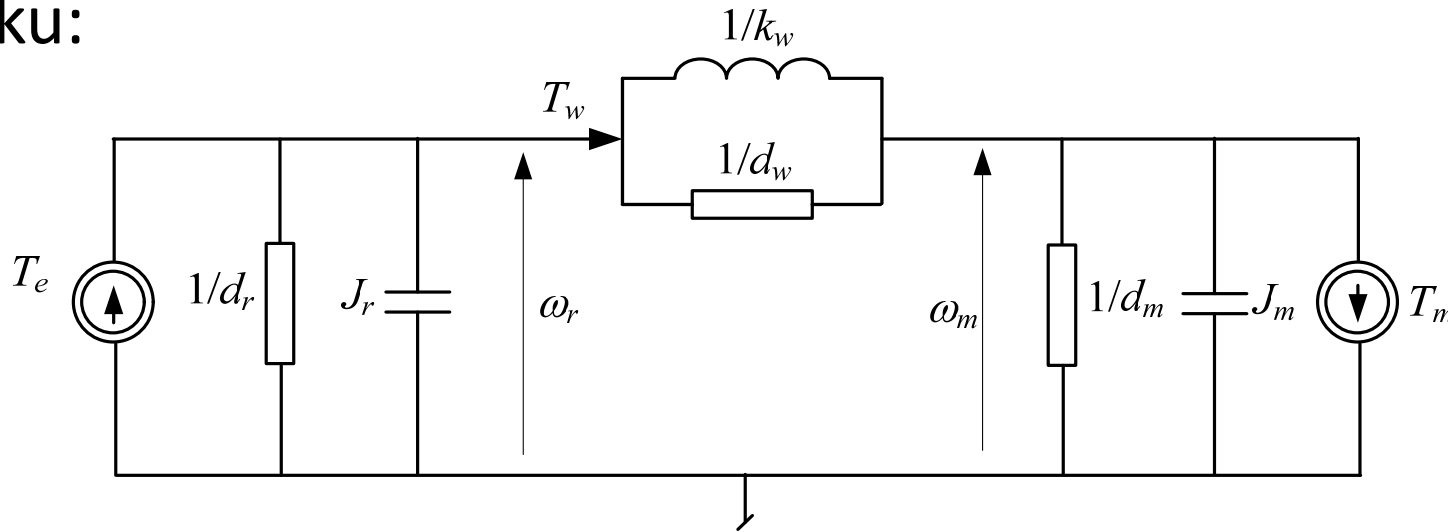
Modelowanie Cyfrowe

Równoważność układu obrotowego z układem elektrycznym

| Układ mechaniczny obrotowy | Układ elektryczny |
|--|--|
| moment inercji J ($\text{kg}\cdot\text{m}^2$) | pojemność C (F) |
| moment obrotowy T ($\text{N}\cdot\text{m}$) | prąd i (A) |
| prędkość kątowna ω (rad/s) | napięcie u (V) |
| przesunięcie kątowe γ (rad) | strumień magnetyczny ψ (Vs) |
| współczynnik sprężystości k ($\text{N}\cdot\text{m}/\text{rad}$) | odwrotność indukcyjności $1/L$ (1/H) |
| współczynnik tłumienia skrętu d ($\text{N}\cdot\text{m s}/\text{rad}$) | przewodność $1/R$ ($\text{S} = 1/\Omega$) |
| <p>Podstawowe relacje:</p> <p>moment inercji: $T = J \frac{d\omega}{dt} = J \frac{d^2\gamma}{dt^2}$, $\omega = \frac{d\gamma}{dt}$</p> <p>sprężyna skrętna $T = k\gamma$</p> <p>tłumik: $T = d\omega = d \frac{d\gamma}{dt}$</p> | <p>Podstawowe relacje:</p> <p>kondensator: $i = C \frac{du}{dt} = C \frac{d^2\psi}{dt^2}$, $u = \frac{d\psi}{dt}$</p> <p>cewka: $i = \frac{1}{L} \psi$</p> <p>przewodność $i = \frac{1}{R} u = \frac{1}{R} \frac{d\psi}{dt}$</p> |

Modelowanie Cyfrowe

Zgodnie z zasadą równoważności, układ wirujący może być przedstawiony w postaci obwodu elektrycznego, jak na rysunku:



Wniosek: jak widać, zasady tworzenia modeli dynamiki układów mechanicznych i elektrycznych są podobne. **Zasada równoważności modeli** może być zastosowana także do innych zjawisk fizycznych.

Modelowanie Cyfrowe

W dalszej części wykładu ograniczymy rozważania głównie do modeli układów elektrycznych (sieci elektrycznych).

Stosowane są tu dwa podejścia do zagadnienia modelowania cyfrowego:

1. Tworzenie cyfrowych modeli elementów (jak R, L, C) sieci elektrycznej, z których są następnie budowane i rozwiązywane modele sieci złożonych.
2. Tworzenie modeli matematycznych złożonych sieci elektrycznych i ich rozwiązywanie odpowiednimi metodami numerycznymi.

Pokrótce zapoznamy się z obu tymi metodami.

Modele elementów sieci elektrycznej R , L , C

Modele o parametrach:

- **skupionych** – pomijany jest rozmiar elementu;
- **rozłożonych** – zmienne niezależne: czas t oraz odległość x .

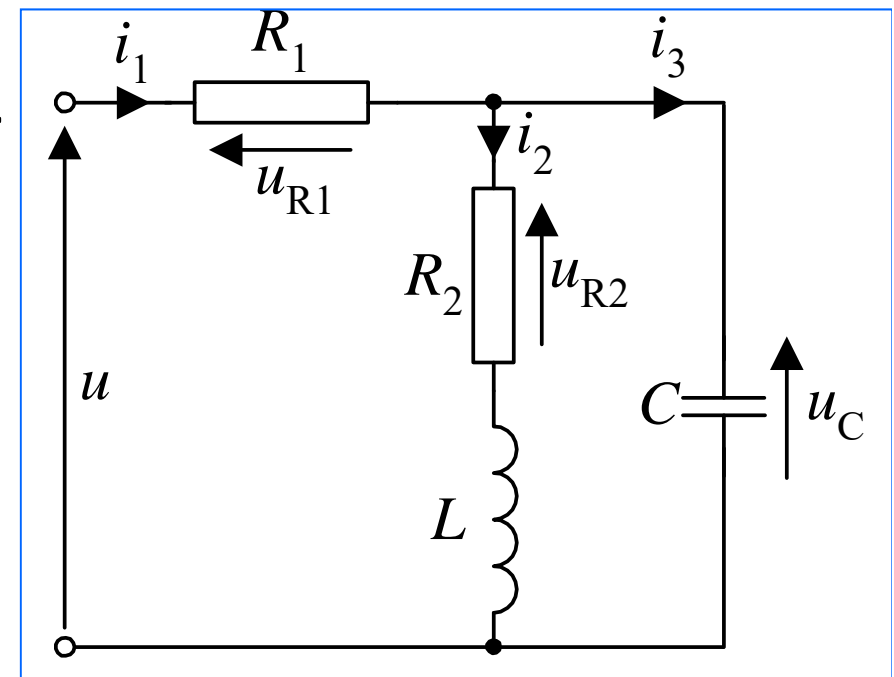
Modele ze względu na charakter funkcji:

- **liniowe;**
- **nieliniowe.**

Modele ze względu na charakter czasu:

- **ciągłe;**
- **dyskretne (cyfrowe).**

...



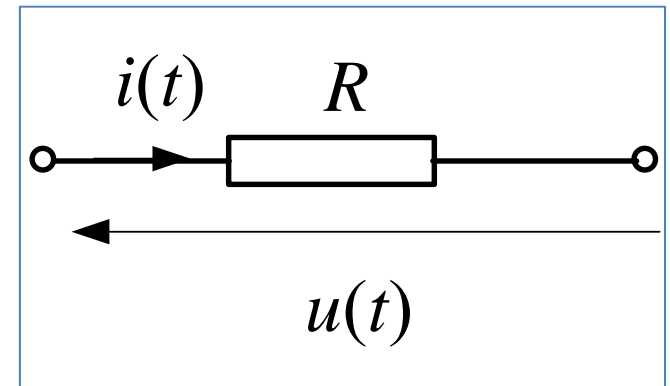
Model liniowej rezystancji R / przewodności G

Rezystancja liniowa (opornik) jest określona przez stałą wartość oporności:

$$i(k) = \frac{1}{R} u(k) = Gu(k)$$

gdzie k wskazuje na dyskretną reprezentację czasu (numer kroku).

Powyższy związek nie jest zależny od sposobu reprezentacji czasu: jest ważny dla czasu ciągłego lub dyskretnego, a także bez związku z czasem.



Model liniowej indukcyjności L

Gałąź indukcyjności jest dobrze znana z opisu modelu ciągłego:

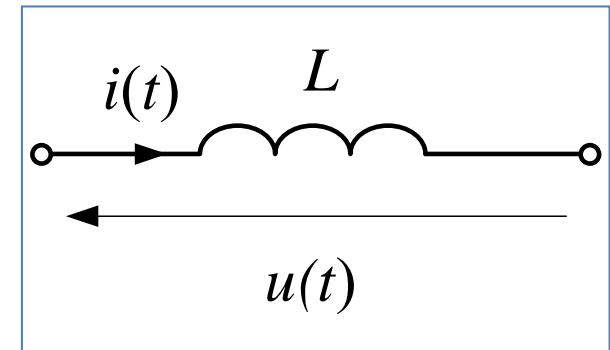
$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

W bardziej ogólnej postaci zależność ta ma następującą formę:

$$u(t) = \frac{d\psi(t)}{dt}$$

gdzie ψ jest strumieniem magnetycznym:

$$\psi(t) = L(i)i(t) \quad L(i) = \frac{d\psi(i)}{di}$$



W modelu ciągłym: $L = \frac{d\psi(i)}{di} = \text{const}, \quad \psi(t) = Li(t)$

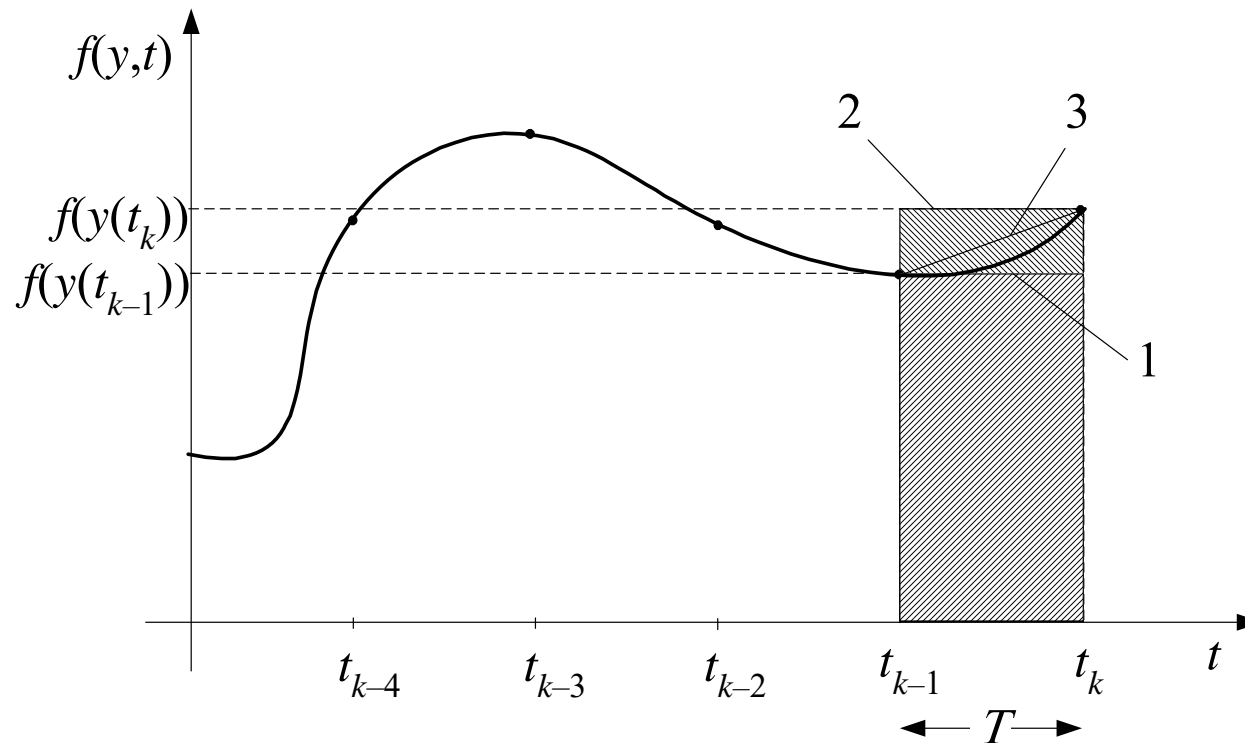
Model liniowej indukcyjności L

Dyskretny model indukcyjności: $di(t)/dt = u(t)/L$

skąd:

$$i(t_k) = \frac{1}{L} \int_{t_0}^{t_k} u(\tau) d\tau = i(t_{k-1}) + \frac{1}{L} \int_{t_{k-1}}^{t_k} u(\tau) d\tau$$

Całka po prawej stronie może być przybliżona w różny sposób:



Model liniowej indukcyjności L

Całka po prawej stronie może być przybliżona w różny sposób:

- niejawna metoda prostokątów (Eulera) ($t_k = T \cdot k$) :

$$i(k) = i(k-1) + \frac{T}{L} u(k)$$

i dalej:

$$i(k) = Gu(k) + i(k-1), \quad G = \frac{T}{L}$$

z warunkiem początkowym: $i(0) = i_0$

- jawna metoda prostokątów (Eulera):

$$i(k) = i(k-1) + \frac{T}{L} u(k-1)$$

nie jest zazwyczaj stosowana ze względu na problemy ze stabilnością w stanach dynamicznych.

Model liniowej indukcyjności L

- metoda trapezów :

$$i(k) = i(k-1) + \frac{T}{2L} (u(k-1) + u(k))$$

i dalej:

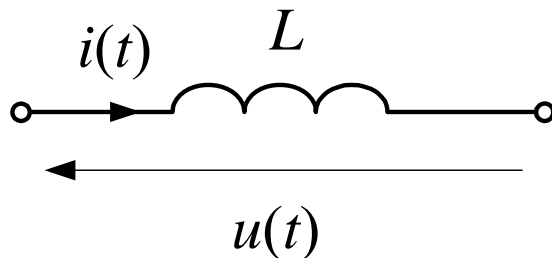
$$i(k) = Gu(k) + i(k-1) + Gu(k-1), \quad G = \frac{T}{2L}$$

co prowadzi do:

$$i(k) = Gu(k) + j(k-1), \quad j(k-1) = i(k-1) + Gu(k-1)$$

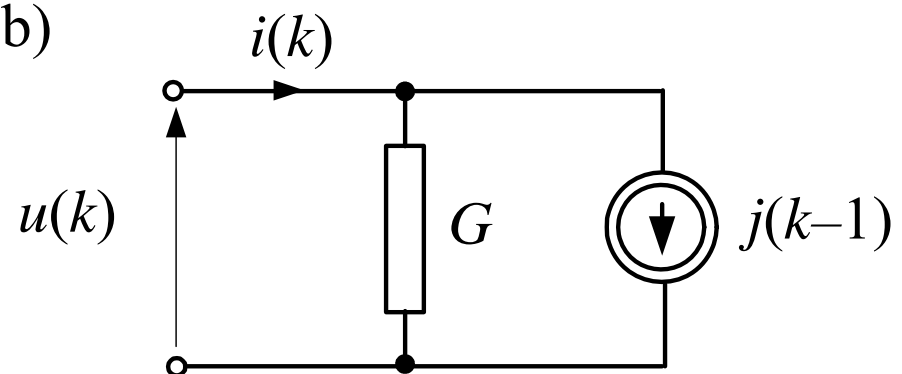
model ciągły

a)



model dyskretny (cyfrowy)

b)



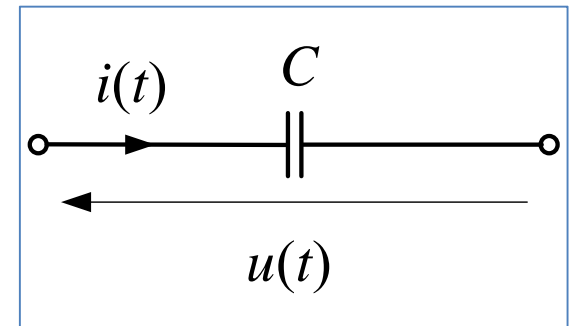
Model liniowej pojemności C

Podstawowa zależność między prądem i napięciem:

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$$

W bardziej ogólnej postaci zależność ta ma następującą formę:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$



gdzie q jest ładunkiem elektrycznym:

$$q(t) = C(u)u(t) \quad C(u) = \frac{dq(u)}{du}$$

W modelu ciągłym: $C = \frac{dq(u)}{du} = \text{const}, \quad q(t) = Cu(t)$

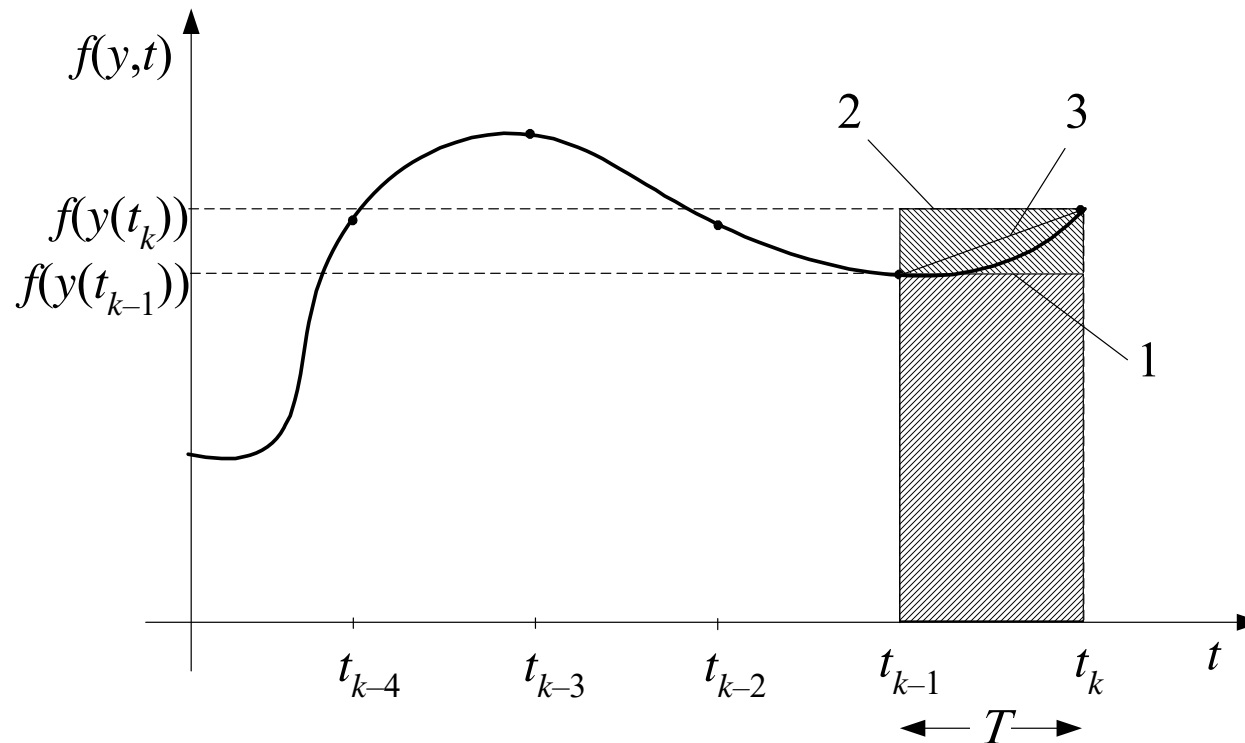
Model liniowej pojemności C

Dyskretny model pojemności: $du(t) / dt = i(t) / C$

skąd:

$$u(t_k) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^{t_k} i(\tau) d\tau = u(t_{k-1}) + \frac{1}{C} \int_{t_{k-1}}^{t_k} i(\tau) d\tau$$

Całka po prawej stronie może być przybliżona w różny sposób:



Model liniowej pojemności C

Całka po prawej stronie może być przybliżona w różny sposób:

- **niejawna metoda prostokątów (Eulera)** ($t_k = Tk$) :

$$u(k) = u(k-1) + \frac{T}{C} i(k)$$

i dalej:

$$i(k) = \frac{C}{T} (u(k) - u(k-1)) = \frac{C}{T} u(k) - \frac{C}{T} u(k-1)$$

Ostatecznie:

$$i(k) = Gu(k) + j(k-1), \quad G = \frac{C}{T}, \quad j(k-1) = -Gu(k-1),$$

z warunkiem początkowym: $u(0) = u_0$

Model liniowej pojemności C

- metoda trapezów :

$$u(k) = u(k-1) + \frac{T}{2C} (i(k-1) + i(k))$$

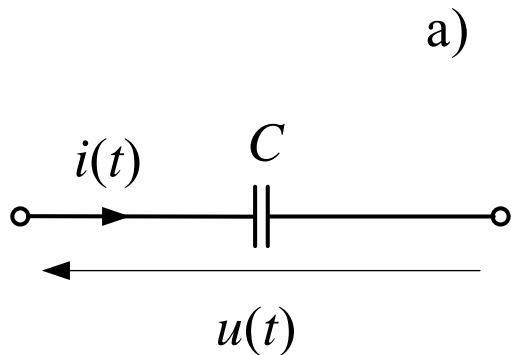
i dalej:

$$i(k) = Gu(k) - i(k-1) - Gu(k-1), \quad G = \frac{2C}{T}$$

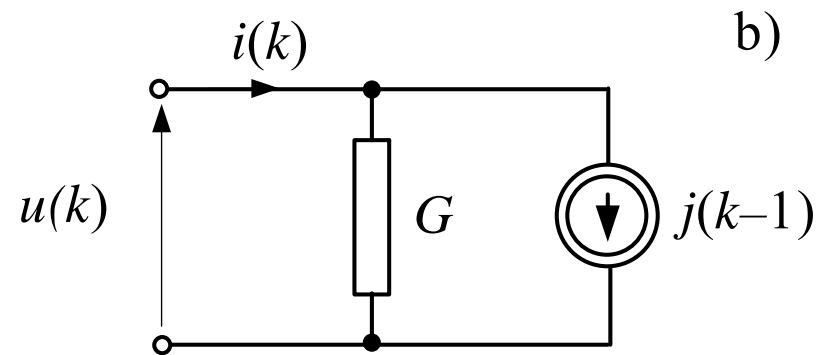
co prowadzi do:

$$i(k) = Gu(k) + j(k-1), \quad j(k-1) = -i(k-1) - Gu(k-1)$$

model ciągły



model dyskretny (cyfrowy)



Modele cyfrowe złożonych gałęzi

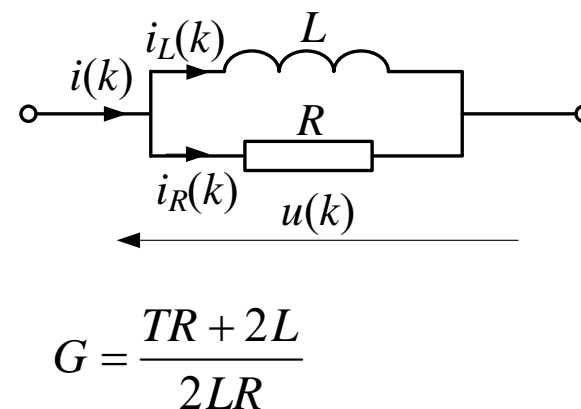
W praktycznych programach gałęzie sieci są najczęściej złożone z kilku rozpatrywanych tu elementów, co upraszcza analizę złożonych sieci. Najczęściej podstawowa gałąź sieci jest złożona z trzech szeregowo połączonych elementów RLC.

Przykład: zbudować cyfrowy model gałęzi jak na rysunku; całkowanie reprezentować metodą trapezów.

$$i(k) = i_L(k) + i_R(k)$$

Korzystając z modeli R oraz L napiszemy:

$$i(k) = \frac{T}{2L} (u(k) + u(k-1)) + i(k-1) + \frac{1}{R} (u(k) - u(k-1))$$

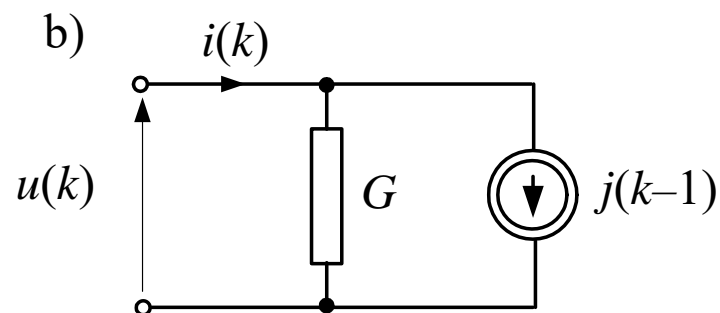
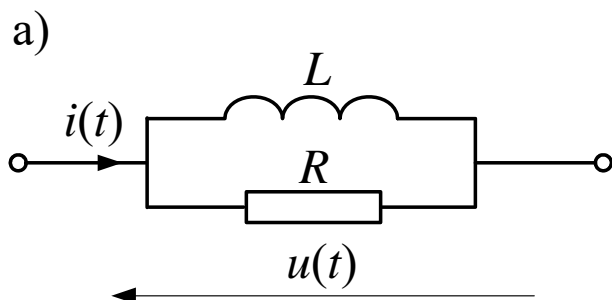


co daje: $i(k) = Gu(k) + j(k-1)$, $j(k-1) = i(k-1) + \frac{TR - 2L}{2LR} u(k-1)$

Modele cyfrowe złożonych gałęzi

Ostatecznie otrzymamy: $i(k) = Gu(k) + j(k-1)$

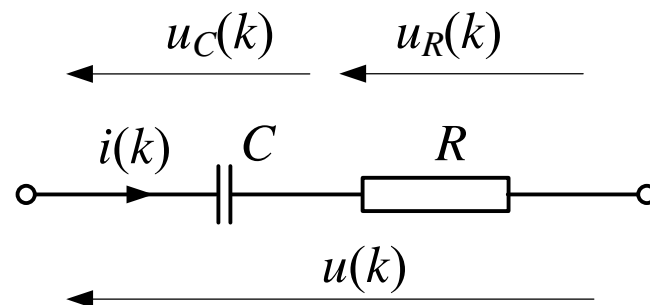
gdzie: $G = \frac{TR + 2L}{2LR}$ $j(k-1) = i(k-1) + \frac{TR - 2L}{2LR}u(k-1)$



Podobnie można budować modele innych gałęzi złożonych:

Tym razem: $u(k) = u_C(k) + u_R(k)$

skąd: $u_C(k) = u(k) - u_R(k)$
 $u_C(k-1) = u(k-1) - u_R(k-1)$



co można wstawić do modelu kondensatora i uzyskać rozwiązanie.

Modele cyfrowe złożonych gałęzi

Model kondensatora: $u(k) = u(k-1) + \frac{T}{2C}(i(k-1) + i(k))$

Podstawienie:

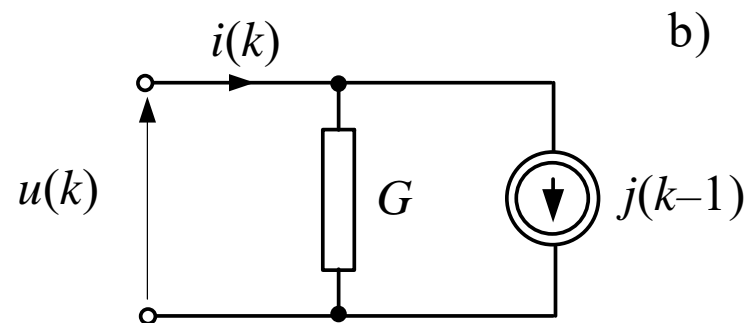
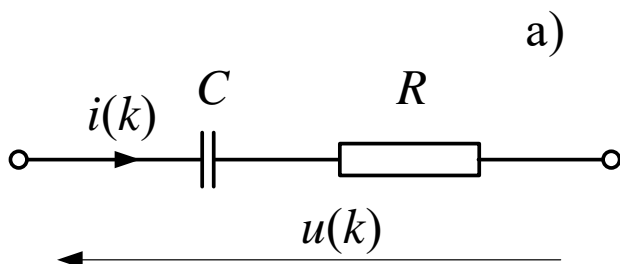
$$u(k) - u_R(k) = u(k-1) - u_R(k-1) + \frac{T}{2C}(i(k-1) + i(k))$$

ale: $u_R(k) = Ri(k)$, $u_R(k-1) = Ri(k-1)$

Po wstawieniu i uporządkowaniu:

$$i(k) = \frac{2C}{T}(u(k) - Ri(k)) - i(k-1) - \frac{2C}{T}(u(k-1) - Ri(k-1))$$

$$i(k) = Gu(k) + j(k-1) \quad G = \frac{2C}{T+2RC} \quad j(k-1) = -Gu(k-1) - \frac{T-2RC}{T+2RC}i(k-1)$$



Modele elementów sieci elektrycznej R, L, C

Uwagi ogólne

- gałęzie R, L, C mogą być opisane liniowymi modelami odwzorowującymi zależności pomiędzy prądami i napięciami w tych elementach; modele dynamiczne odnoszą się do elementów L, C ;
- modele dyskretne mogą być zapisane w formie zależności:
 - napięciowo-rezystancyjnych:
$$u(k) = Ri(k) + e(k-1) \quad e(k-1) = f(u(k-1), i(k-1), R)$$
 - prądowo-przewodnościowych:
$$i(k) = Gu(k) + j(k-1) \quad j(k-1) = f(i(k-1), u(k-1), G)$$
- do dalszych rozważań przyjęto ten ostatni sposób opisu dynamiki gałęzi.

Modele elementów sieci elektrycznej R, L, C

Uwagi ogólne

- w modelu prądowo-przewodnościowym źródłami są prądy, natomiast elementy są reprezentowane za pomocą przewodności;
- odnosi się to do modeli wszystkich gałęzi w sieci, także modeli źródeł zewnętrznych;
- właściwą metodą rozwiązywania równań sieci w takim przypadku jest metoda potencjałów węzłowych;
- model sieci jest wówczas reprezentowany następującym równaniem macierzowym:

$$\mathbf{G}_{n_w \times n_w} \mathbf{u}_{n_w \times 1} = \mathbf{i}_{n_w \times 1}$$

n_w – liczba niezależnych węzłów sieci.

