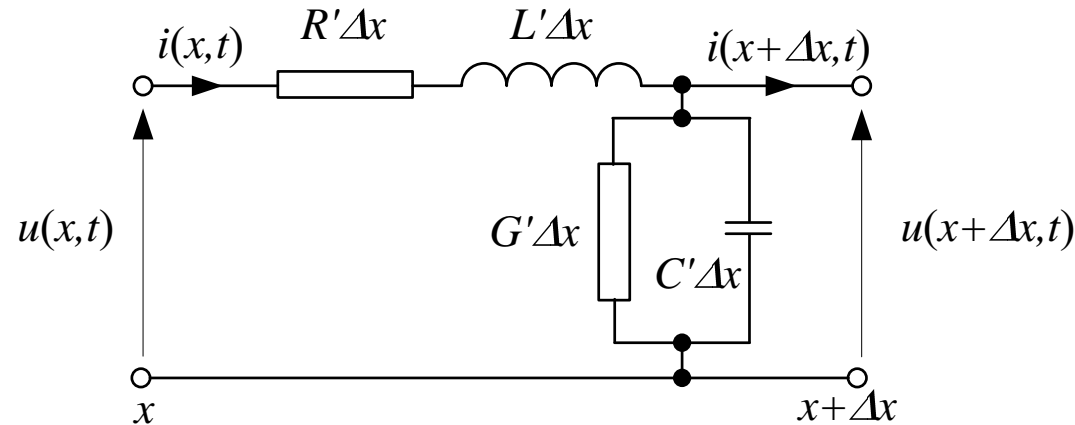


# Modelowanie linii długiej

Schemat elektryczny odcinka linii o długości  $\Delta x$ :



$R'$ ,  $G'$ ,  $L'$ ,  $C'$  – jednostkowe parametry obwodu: rezystancja, przewodność, indukcyjność oraz pojemność w odniesieniu do jednostki długości (km).

Równania obwodu:

$$u(x,t) = R'\Delta x \cdot i(x,t) + L'\Delta x \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} + u(x + \Delta x, t),$$

$$i(x,t) = G'\Delta x \cdot u(x + \Delta x, t) + C'\Delta x \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial t} + i(x + \Delta x, t),$$

# Modelowanie linii długiej

Zakładając  $\Delta x \rightarrow 0$  otrzymamy:

$$\begin{aligned}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} &= R'i(x,t) + L'\frac{\partial i(x,t)}{\partial t}, \\ -\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} &= G'u(x,t) + C'\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\end{aligned}$$

co można zapisać w postaci dwóch równań drugiego rzędu:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= R'G'u + (R'C' + G'L')\frac{\partial u}{\partial t} + L'C'\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} &= R'G'i + (R'C' + G'L')\frac{\partial i}{\partial t} + L'C'\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}\end{aligned}$$

Uproszczenie modelu linii, polega na pominięciu strat:  $R' = 0$ ,  $G' = 0$ .  
Nie jest to zazwyczaj przesadne uproszczenie w budowanych liniach.

# Modelowanie linii długiej

Prowadzi to do modelu linii bezstratnej:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

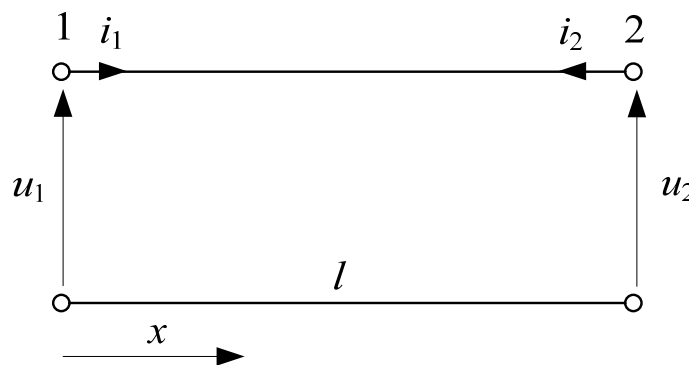
$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0,$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} - \text{szybkość rozchodzenia się fali.}$$

co można heurystycznie rozpatrywać jako superpozycja fal biegnących w dwóch kierunkach:

$$u(x, t) = u_a(x - vt) + u_b(x + vt)$$

i podobnie dla prądu:



$$Z_f = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

$$i(x, t) = i_a(x - vt) - i_b(x + vt) = \frac{1}{Z_f} (u_a(x - vt) - u_b(x + vt))$$

# Modelowanie linii długiej

Wielkości odnoszące się do obu kierunków fal:  $u_a(x-vt)$  oraz  $u_b(x+vt)$  mogą zostać wyeliminowane, jeśli założymy, że fala wysłana na początku linii o długości  $l$  w chwili  $t-\tau$ :  $u_a(0-v(t-\tau))$ , osiągnie drugi jej koniec po czasie  $\tau$ :  $u_a(l-vt)$ , skąd:  $u_a(-v(t-\tau)) = u_a(l-vt)$ . Prowadzi to do równania:

$$u_a(x-vt) = \frac{1}{2} \left( u(x,t) + Z_f i(x,t) \right)$$

Zmienna  $x$  oznacza odległość od początku linii. W praktycznym zastosowaniu można zrezygnować z ciągłej wartości zmiennej  $x$ , zakładając, że interesuje nas tylko rozwiązanie na obu jej końcach:  $x = 0$  (początek linii, indeks 1) oraz  $x = l$  (koniec linii, indeks 2). Prowadzi to do następujących równań:

$$i_1(t) = \frac{1}{Z_f} u_1(t) - \frac{1}{Z_f} u_2(t-\tau) - i_2(t-\tau),$$

$$i_2(t) = \frac{1}{Z_f} u_2(t) - \frac{1}{Z_f} u_1(t-\tau) - i_1(t-\tau)$$

## Modelowanie linii długiej

W tych równaniach  $\tau$  jest czasem przejścia fali wzdłuż linii:  $\tau = l/v$ .

W modelu dyskretnym (cyfrowym) ten czas jest określony przez liczbę kroków symulacji  $m$ :  $m = \tau/T$ . Prowadzi to do modelu cyfrowego:

$$i_1(k) = \frac{1}{Z_f} u_1(k) - \frac{1}{Z_f} u_2(k-m) - i_2(k-m),$$

$$i_2(k) = \frac{1}{Z_f} u_2(k) - \frac{1}{Z_f} u_1(k-m) - i_1(k-m),$$

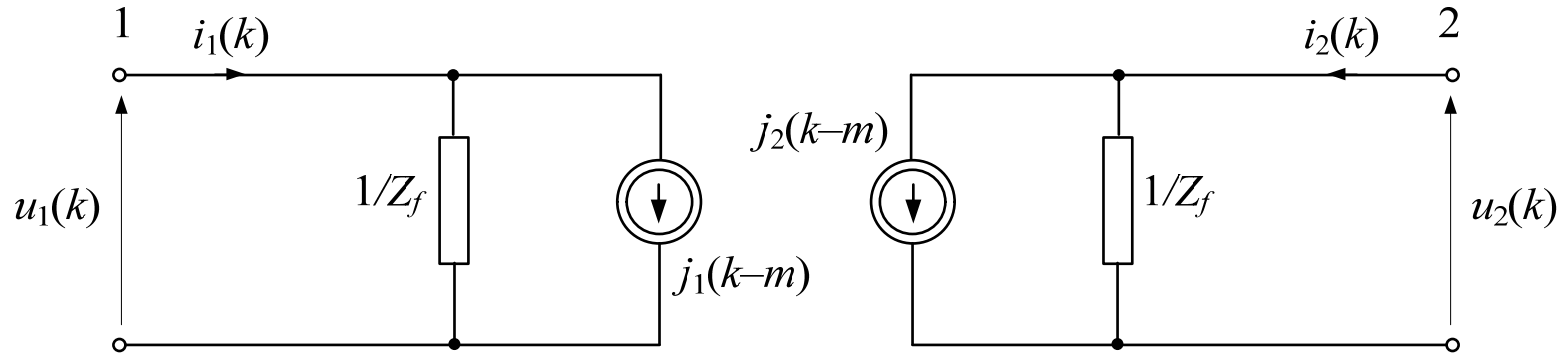
gdzie: indeksy 1, 2 wskazują na początek i koniec linii.

$$i_1(k) = \frac{1}{Z_f} u_1(k) + j_1(k-m), \quad j_1(k-m) = -\frac{1}{Z_f} u_2(k-m) - i_2(k-m),$$

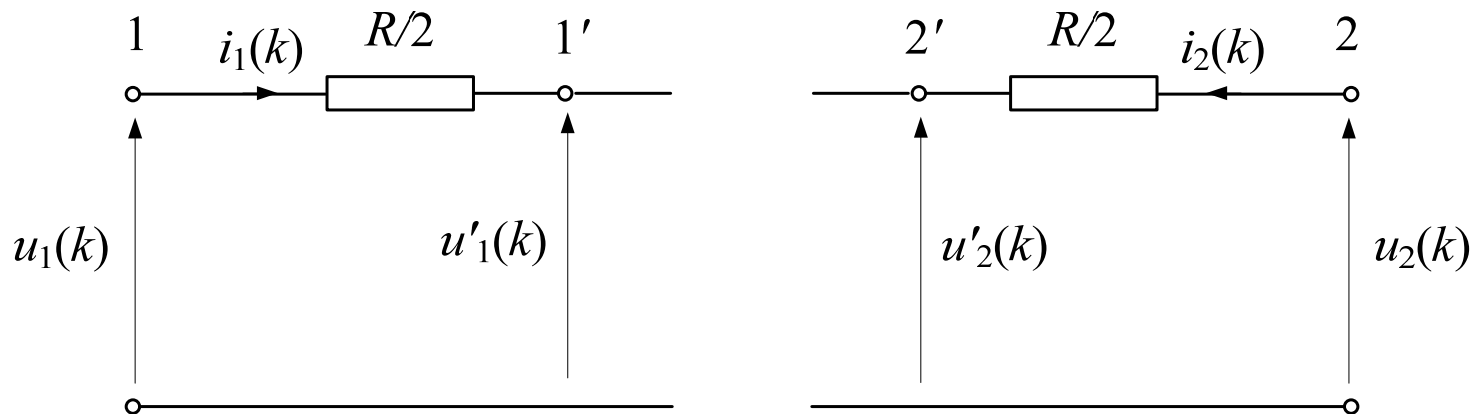
$$i_2(k) = \frac{1}{Z_f} u_2(k) + j_2(k-m), \quad \text{gdzie:} \quad j_2(k-m) = -\frac{1}{Z_f} u_1(k-m) - i_1(k-m),$$

# Modelowanie linii długiej

Równaniom tym odpowiada schemat modelu linii bez strat:



Rezystancję linii można odwzorować przez dodanie na obu końcach połowę jej oporności w postaci oporników o parametrach skupionych:



Indeksy  $1'$ ,  $2'$  oznaczają początek i koniec modelu linii bezstratnej.

# Modelowanie linii długiej

Uwzględnienie tych oporności prowadzi do następujących równań:

$$i_1(k) = G_f u_1(k) + j_1(k - m),$$

$$i_2(k) = G_f u_2(k) + j_2(k - m),$$

gdzie:

$$j_1(k - m) = -G_f u_2(k - m) - h_f i_2(k - m),$$

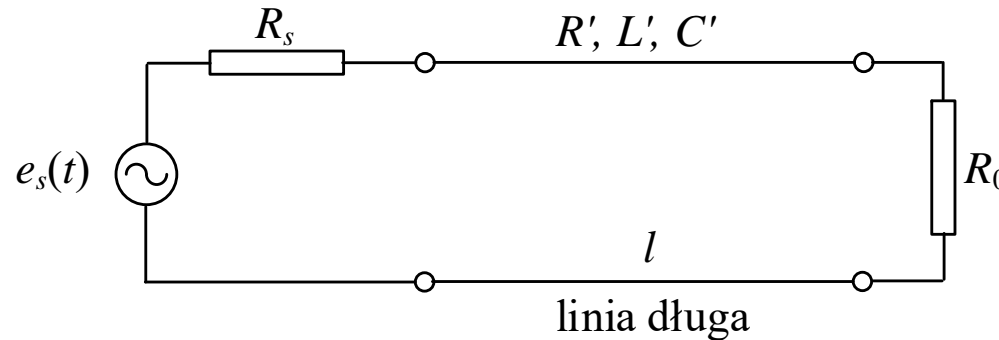
$$j_2(k - m) = -G_f u_1(k - m) - h_f i_1(k - m),$$

$$G_f = \frac{1}{Z_f + R/2} \quad h_f = \frac{2Z_f - R}{2Z_f + R} \quad R = l R'$$

Jak widać, model linii zmienia się tylko nieznacznie. W celu uzyskania większej dokładności odwzorowania rezystancji, stosuje się podział rezystancji skupionej linii  $R$  na 2 – 3 części.

# Modelowanie linii długiej

Przykład obliczeniowy. Przeprowadzić symulację stanu przejściowego w obwodzie z rysunku po załączeniu napięcia zasilającego. Przyjąć następujące parametry:  $e_s(t) = 180\cos(2\pi ft - \pi/6)\text{kV}$ ,  $f=50\text{Hz}$ ,  $R_s = 2,5\Omega$ ,  $R_0 = 250\Omega$ ,  $R' = 0,04\Omega/\text{km}$ ,  $L' = 1,6 \cdot 10^{-3}\text{H}/\text{km}$ ,  $C' = 1,05 \cdot 10^{-8}\text{F}/\text{km}$ ,  $l = 160\text{km}$ .



Zauważmy, że przytoczony model linii ma charakter prądowo-przewodnościowy, wobec czego taki też powinien być schemat zastępczy rozpatrywanej sieci.

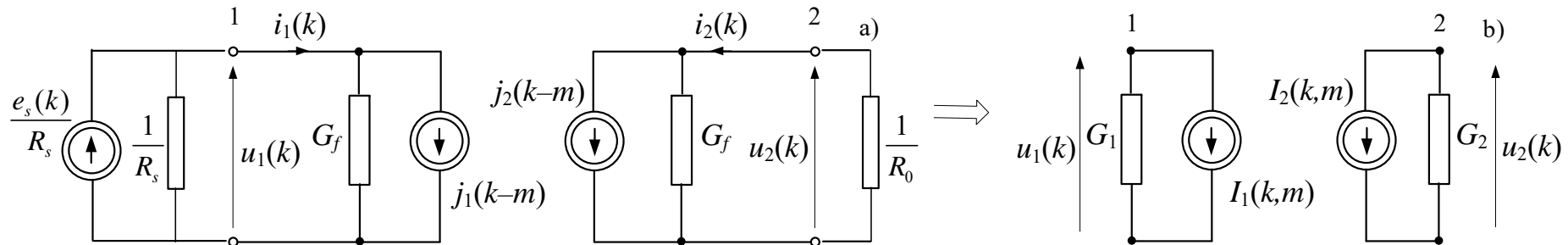
Obliczamy parametry modelu:

$$v = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = 2,4398 \cdot 10^5 \text{m/s}, Z_f = \frac{1}{G_f} = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = 390,36\Omega, R = lR' = 6,4\Omega$$



# Modelowanie linii długiej

Schemat modelu cyfrowego obwodu:



Pozostałe parametry:

$$G_1 = G_f + \frac{1}{R_s}, \quad G_2 = G_f + \frac{1}{R_0}, \quad I_1(k, m) = j_1(k - m) - \frac{e_s(k)}{R_s}, \quad I_2(k, m) = j_2(k - m)$$

Przyjmujemy krok modelowania  $T = 4,0e-5s$  co daje:

$$m = \text{round}\left(\frac{\tau}{T}\right) = \text{round}\left(\frac{l}{Tv}\right) = \text{round}\left(\frac{l\sqrt{L'C'}}{T}\right) = 16 \text{ kroków symulacji.}$$

Obliczenia:

$$u_1(k) = \frac{-I_1(k, m)}{G_1} = \frac{1}{G_1} \left( \frac{e_s(k)}{R_s} - j_1(k - m) \right) \quad u_2(k) = -\frac{I_2(k, m)}{G_2} = \frac{-j_2(k - m)}{G_2}$$

$$i_1(k) = j_1(k - m) + G_f u_1(k)$$

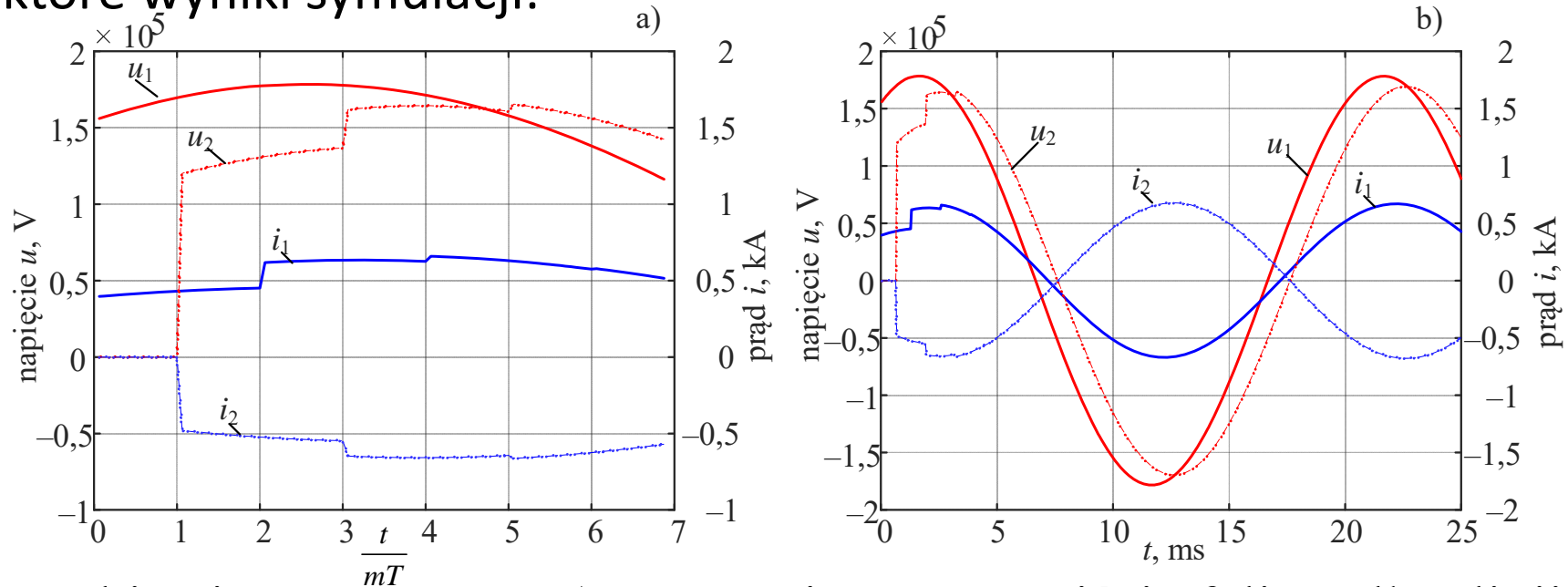
Warunki początkowe:

$$i_2(k) = j_2(k - m) + G_f u_2(k) \quad j_1(k - n), \quad j_2(k - n), \quad n = 1, 2, \dots, m$$

# Modelowanie linii długiej

Powyższa procedura jest zapisana w pliku: Przyklad2\_linia\_1.m

Niektóre wyniki symulacji:



Jednostki osi czasu na rys. a) oznaczają czas przejścia fali wzdłuż linii. Przy zerowych warunkach początkowych napięcie  $u_2$  oraz prąd  $i_2$  ulegają zmianie po przejściu fali z początku na koniec linii, natomiast napięcie  $u_1$  oraz prąd  $i_1$  zmieniają się po powrocie tej fali na początek. Stan przejściowy jest tłumiony ze względu na obecność rezystancji  $R$ ,  $R_s$  oraz  $R_0$ .

# Modelowanie linii długiej

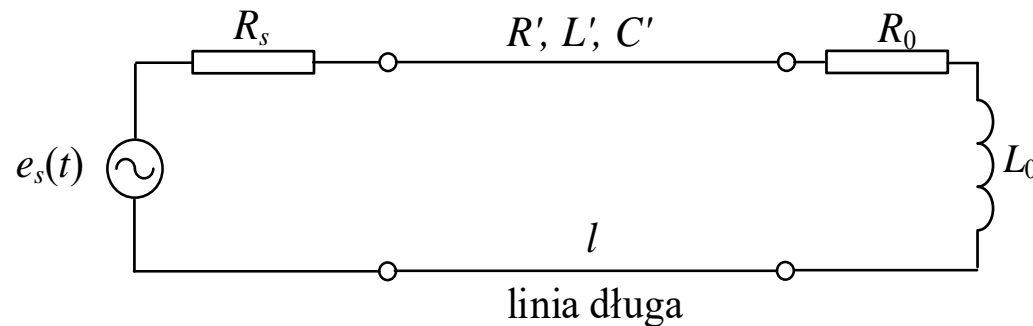
Ten prosty model linii z obciążeniem na jej końcu pozwala prześledzić typowe procesy związane z załączeniem napięcia zasilania w dwóch charakterystycznych stanach obciążenia:

- przy braku obciążenia, co można rozważać dla bardzo dużej wartości  $R_0$ , na przykład:  $R_0 = 1.0e8 \Omega$  – jest to stan związany z ładowaniem linii, która ma cechy kondensatora;
- przy zwarcu na końcu linii, co można odwzorować za pomocą bardzo małej wartości obciążenia:  $R_0 = 1.0e-8 \Omega$ .

Stany te można analizować z wykorzystaniem załączonego programu przez prostą modyfikację wartości  $R_0$ .

# Modelowanie linii długiej

Przykład rozszerzony. Załóżmy, że w charakterze obciążenia występuje gałąź RL o następujących parametrach:  $R_0 = 225 \Omega$ ,  $L_0 = 0,3469\text{H}$  (rys.). Pozostałe parametry pozostają bez zmian. Opracować model oraz przeprowadzić symulację stanu przejściowego.



Dyskretny model gałęzi RL jest określony równaniem:

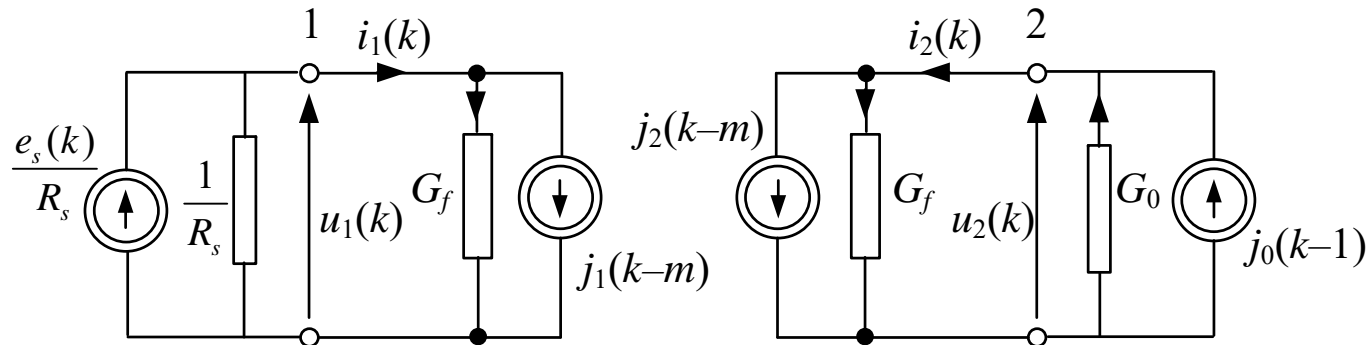
$$i(k) = Gu(k) + j(k-1)$$

gdzie:

$$G = \frac{T}{2L + RT} \quad j(k-1) = h_{RL}i(k-1) + Gu(k-1) \quad h_{RL} = \frac{2L - RT}{2L + RT}$$

# Modelowanie linii długiej

Z uwzględnieniem tego modelu schemat całego obwodu:



Algorytm obliczeń pozostaje bez zmian, należy jedynie uwzględnić nowy model obciążenia.

Obliczenia:

$$u_1(k) = \frac{-I_1(k, m)}{G_1} = \frac{1}{G_1} \left( \frac{e_s(k)}{R_s} - j_1(k - m) \right)$$

$$u_2(k) = -\frac{I_2(k, m)}{G_2} = \frac{j_0(k - 1) - j_2(k - m)}{G_2}$$

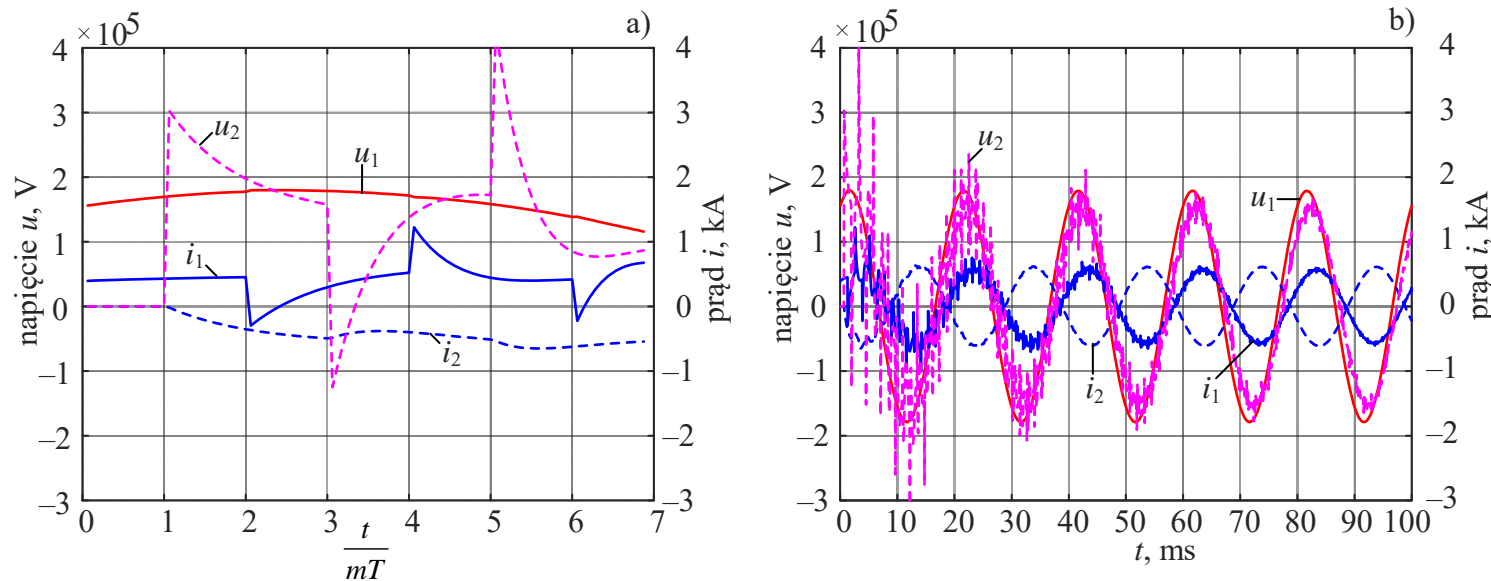
oraz:

$$i_1(k) = j_1(k - m) + G_f u_1(k) \quad i_2(k) = j_2(k - m) + G_f u_2(k)$$

# Modelowanie linii długiej

Powyższa procedura jest zapisana w pliku: Przyklad2\_linia\_2.m

Niektóre wyniki symulacji:

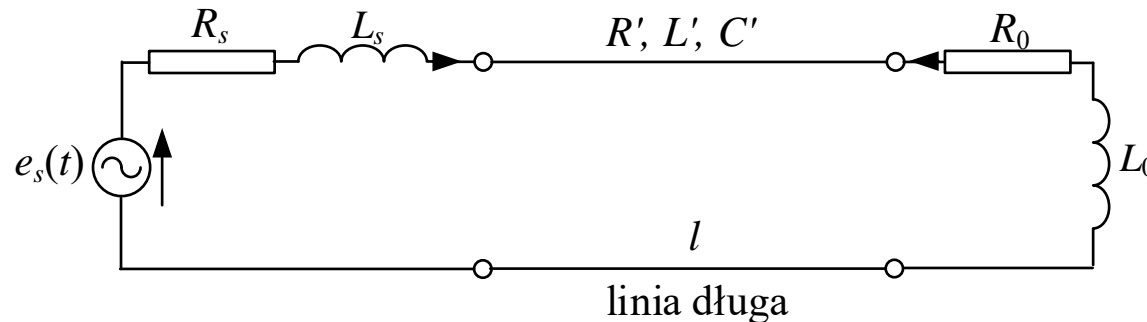


Można zauważyć, że stan przejściowy jest tym razem bardzo dynamiczny. Jest to związane z obecnością indukcyjności w obwodzie obciążenia (na końcu linii), które jest pobudzane przez gwałtowne zmiany napięcia  $u_2$ , co wynika z falowych zjawisk w linii. Gwałtowne oscylacje są tłumione z upływem czasu ze względu na straty w linii i obciążeniu.

# Modelowanie linii długiej

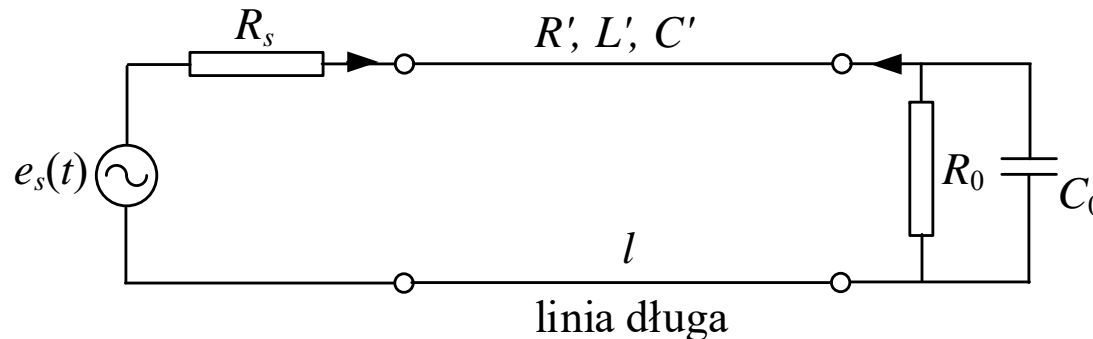
Kolejne dwie modyfikacje tego programu są umieszczone w plikach :

- Przyklad2\_linia\_3.m według schematu:



gdzie na obu końcach linii znajdują się gałęzie RL.

- Przyklad2\_linia\_4.m według schematu:



gdzie obciążenie ma charakter pojemnościowy.

Opis tych procedur znajduje się w pliku Linia\_2\_długa.docx.

