

# Metoda zmiennych stanu

W rozpatrywanej dotychczas metodzie modelowania sieci elektrycznych, cyfrowy model sieci był budowany na bazie cyfrowych modeli poszczególnych jej elementów: gałęzi sieci. Dalszy etap symulacji polega na rozwiązywaniu dyskretnych równań tej sieci.

W tradycyjnym podejściu do modelowania stosuje się odwrotne podejście, które można zapisać w następującej procedurze:

- utworzyć równania dynamiki sieci z zachowaniem reguł elektrotechniki (ciągły model sieci);
- rozwiązać utworzone równania metodami numerycznymi z uwzględnieniem warunków początkowych.

Ze względu na charakter utworzonych równań w pierwszym kroku postępowania, metoda często jest nazywana **metodą zmiennych stanu**.

# Metoda zmiennych stanu

W metodzie zmiennych stanu tworzone są równania sieci o następującej formie:

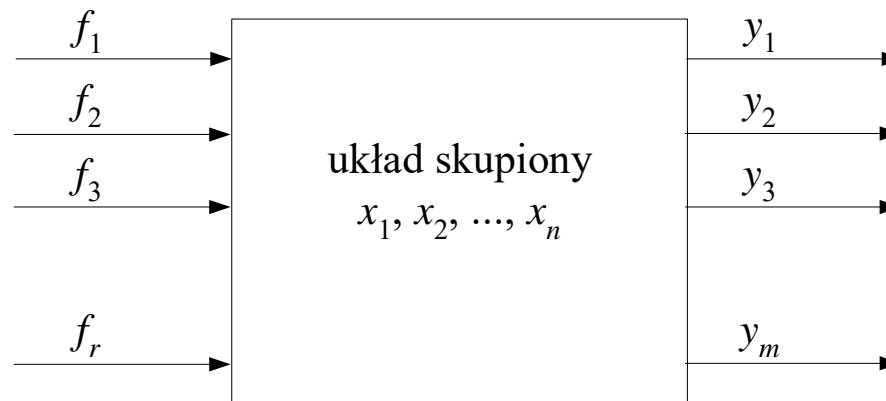
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{f}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{f}(t)$$

gdzie:

$\mathbf{x}(t) = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  – wektor zmiennych stanu,

$\mathbf{A}_{n \times n}$ ,  $\mathbf{B}_{n \times r}$ ,  $\mathbf{C}_{m \times n}$ ,  $\mathbf{D}_{m \times r}$  – macierze parametrów



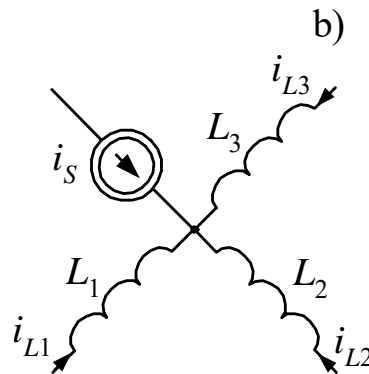
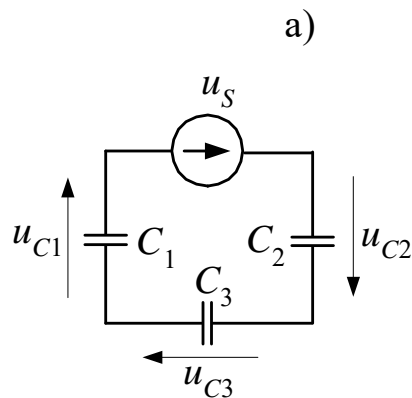
Drugie z powyższych równań nazywa się równaniem wyjść, które definiuje zmienne, które powinny być obliczone (prądy, napięcia lub inne wielkości).

# Metoda zmiennych stanu

W przypadku sieci elektrycznej zależności różniczkowe są związane z modelami elementów reaktancyjnych (inercyjnych), takich jak kondensatory i indukcyjności:

$$\frac{d}{dt}(Cu_C(t)) = i_C(t) \qquad \frac{d}{dt}(Li_L(t)) = u_L(t)$$

Liczba niezależnych elementów tego typu determinuje liczbę zmiennych stanu w równaniu sieci. W złożonej sieci z elementami bezinercyjnymi problem liczby niezależnych elementów inercyjnych można rozstrzygnąć, przez analizę warunków początkowych niezbędnych do rozwiązania odpowiednich równań różniczkowych:



oczko:

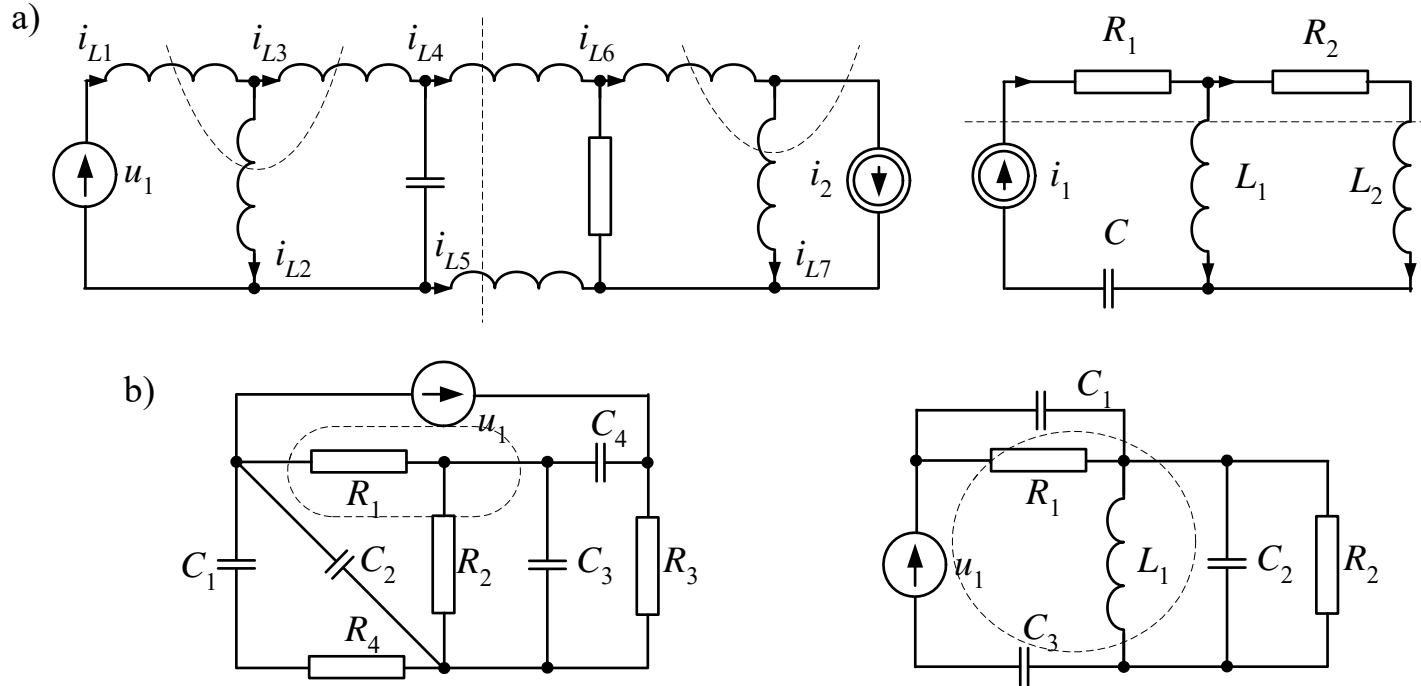
$$u_S(t) + u_{C1}(t) + u_{C2}(t) + u_{C3}(t) = 0$$

przekrój:

$$i_S(t) + i_{L1}(t) + i_{L2}(t) + i_{L3}(t) = 0$$

# Metoda zmiennych stanu

Definicja przekrojów i oczek sieci jest związana z topologią sieci:



Oznaczmy:

$n_{CE}$  – liczba oczek CE,

$n_{LJ}$  – liczba przekrojów LJ,

$n_{LC}$  – liczba elementów L,C w sieci,

liczba niezależnych równań: 
$$n = n_{LC} - (n_{CE} + n_{LJ})$$

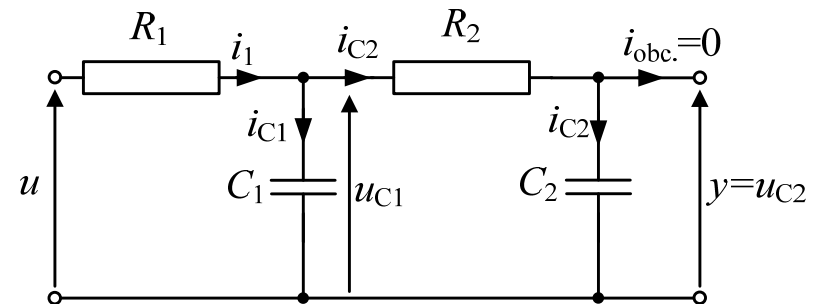
# Metoda zmiennych stanu

Ta redukcja liczby równań opisujących sieć prowadzi do tego, że wśród wielkości wymuszających tworzących wektory napięć i prądów źródłowych mogą się także znaleźć ich pochodne.

Równania stanu są tworzone zgodnie z regułami wynikającymi z praw Kirchhoffa.

**Przykład.** Ułożyć równania stanu i równania wyjść dla podanego obwodu (wyjściem jest napięcie na kondensatorze  $C_1$ ). Utworzyć program Matlab do symulacji stanu przejściowego.

Łatwo sprawdzić, że liczba niezależnych równań stanu:  $n = 2$ . Korzystamy ze znanych zależności związanych z modelem kondensatora. Wystąpią więc dwie zmienne stanu związane z napięciami na kondensatorach:



$$i_{C1} = C_1 \frac{du_{C1}}{dt} \quad i_{C2} = C_2 \frac{du_{C2}}{dt}$$

## Metoda zmiennych stanu

W tych równaniach należy wyeliminować prądy  $i_{C1}$ ,  $i_{C2}$ , które należy uzależnić od napięcia wymuszającego  $u$  oraz zmiennych stanu  $u_{C1}$ ,  $u_{C2}$ :

$$i_{C2} = \frac{u_{C1} - u_{C2}}{R_2} \quad i_{C1} = i_1 - i_{C2} = \frac{u - u_{C1}}{R_1} - \frac{u_{C1} - u_{C2}}{R_2}$$

skąd:  $C_1 \frac{du_{C1}}{dt} = \frac{u - u_{C1}}{R_1} - \frac{u_{C1} - u_{C2}}{R_2} \quad C_2 \frac{du_{C2}}{dt} = \frac{u_{C1} - u_{C2}}{R_2}$

i dalej równania stanu oraz wyjść:

$$\frac{du_{C1}}{dt} = -\left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1}\right)u_{C1} + \frac{1}{R_2 C_1}u_{C2} + \frac{1}{R_1 C_1}u$$

$$\frac{du_{C2}}{dt} = \frac{1}{R_2 C_2}u_{C1} - \frac{1}{R_2 C_2}u_{C2}$$

$$y = u_{C2}$$

Można je zapisać w postaci macierzowej:

## Metoda zmiennych stanu

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_{c1}(t) \\ u_{c2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} - \frac{1}{R_2 C_1} & \frac{1}{R_2 C_1} \\ \frac{1}{R_2 C_2} & -\frac{1}{R_2 C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{c1}(t) \\ u_{c2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

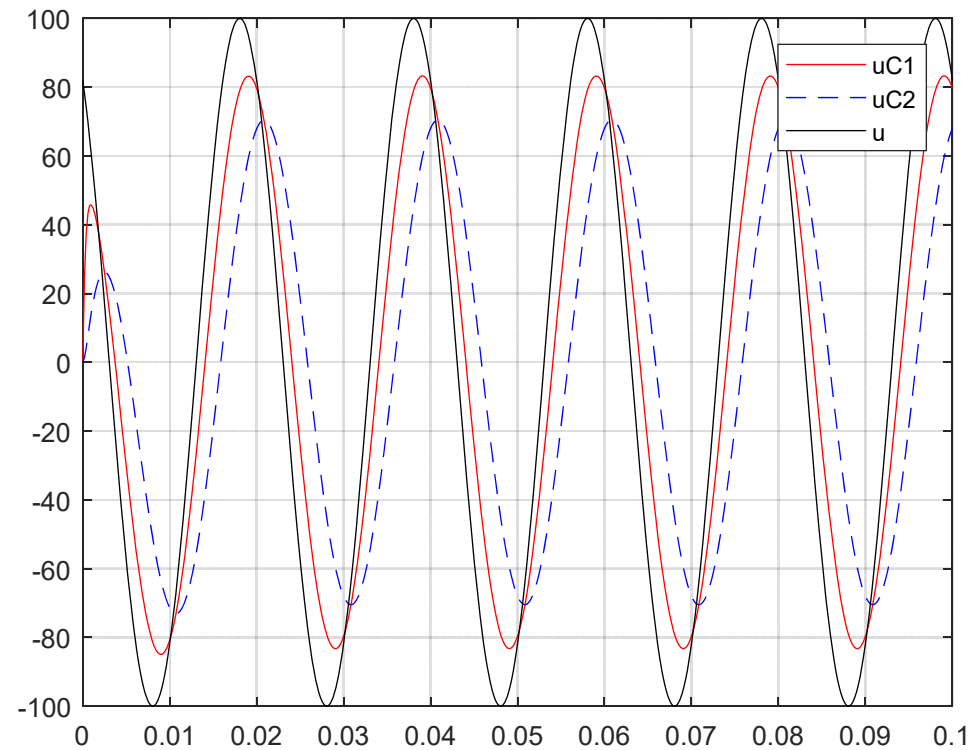
Równanie wyjść bezpośrednio wskazuje na napięcie  $u_{c2}$ :  $y = u_{c2}$ .

Rozwiązanie równania stanu można uzyskać stosując bezpośrednio odpowiednią procedurę w programie Matlab. Należy określić poszczególne parametry obwodu oraz warunki początkowe:  $u_{c1}(0)$ ,  $u_{c2}(0)$ . Propozycja rozwiązania tego równania jest podana w pliku `Przyklad_zs_1.m`. Plik ma formę podprogramu w języku Matlab, co ułatwiło w tym samym pliku dołączenie procedury definiującej prawą stronę równania (pochodne zmiennych stanu).

Warto zauważyć, że powyższy układ równań różniczkowych stanowi zagadnienie liniowe o stałych współczynnikach, którego rozwiązanie jest znane w postaci analitycznej – co także można wykorzystać.

# Metoda zmiennych stanu

Przebiegi zmiennych stanu i napięcia zasilającego.



$$y = u_{C2}$$



# Metoda zmiennych stanu

**Przykład 2.** Utworzyć równania stanu opisujące dynamikę sieci pokazanej na rysunku. Jako zmienne wyjściowe przyjąć prądy w elementach reaktancyjnych:  $i_L$ ,  $u_{C1}$ ,  $u_{C2}$ . Przeprowadzić symulację stanu przejściowego w tym obwodzie przyjmując, że znane są parametry obwodu oraz wymuszenia:  $e = e(t)$  oraz  $j = j(t)$ .

Parametry obwodu są zamieszczone w pliku

Przyklad\_2\_1.m.

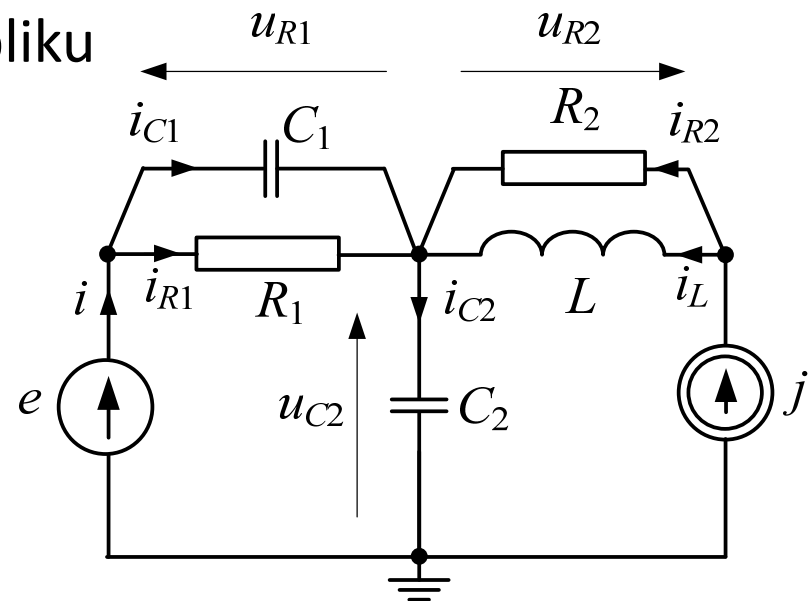
Można zauważyć, że oczko  $e$ - $C_1$ - $C_2$  jest niezależne, więc liczba zmiennych stanu wynosi 2 pomimo tego, że występują 3 elementy inercyjne.

Równania węzłowe:

$$j - i_L - i_{R2} = 0 \quad C_1 \frac{du_{R1}}{dt} + i_{R1} - i = 0 \quad C_2 \frac{du_{C2}}{dt} - i - j = 0$$

Równania oczkowe:

$$e - u_{R1} - u_{C2} = 0 \quad L \frac{di_L}{dt} - R_2 i_{R2} = 0 \quad R_1 i_{R1} - u_{R1} = 0$$



## Metoda zmiennych stanu

Należy z nich wyeliminować wszystkie zmienne, za wyjątkiem zmiennych stanu:  $i_L$ ,  $u_{C1}$ ,  $u_{C2}$  oraz wymuszeń  $e$ , oraz  $j$ . Prowadzi to do następujących równań stanu:

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{R_2}{L} i_L + \frac{R_2}{L} j$$

$$\frac{du_{C2}}{dt} = -\frac{1}{R_1(C_1 + C_2)} u_{C2} + \frac{1}{C_1 + C_2} j + \frac{1}{R_1(C_1 + C_2)} e + \frac{C_1}{C_1 + C_2} \frac{de}{dt}$$

Można stąd także określić wielkości wyjściowe: prąd  $i_L$  (jak wyżej) oraz:

$$i_{C1} = \frac{C_1}{R_1(C_1 + C_2)} u_{C2} - \frac{C_1}{C_1 + C_2} j - \frac{C_1}{R_1(C_1 + C_2)} e + \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \frac{de}{dt}$$

$$i_{C2} = -\frac{C_2}{R_1(C_1 + C_2)} u_{C2} + \frac{C_2}{C_1 + C_2} j + \frac{C_2}{R_1(C_1 + C_2)} e + \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \frac{de}{dt}$$

Po uporządkowaniu otrzymujemy dwa równania stanu i trzy równania wyjść w zapisie macierzowym:

## Metoda zmiennych stanu

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_L \\ u_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_2}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_1(C_1+C_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ u_{C2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{R_2}{L} & 0 \\ \frac{1}{C_1+C_2} & \frac{1}{R_1(C_1+C_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{C_1}{C_1+C_2} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} j \\ e \end{bmatrix} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bf} + \mathbf{B}_1 \frac{d}{dt} \mathbf{f}$$

$$\begin{bmatrix} i_L \\ i_{C1} \\ i_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{C_1}{R_1(C_1+C_2)} \\ 0 & -\frac{C_2}{R_1(C_1+C_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ u_{C2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{C_1}{C_1+C_2} & -\frac{C_1}{R_1(C_1+C_2)^2} \\ \frac{C_2}{C_1+C_2} & \frac{C_2}{R_1(C_1+C_2)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{C_1 C_2}{C_1+C_2} \\ 0 & \frac{C_1 C_2}{C_1+C_2} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} j \\ e \end{bmatrix} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Df} + \mathbf{D}_1 \frac{d}{dt} \mathbf{f}$$

W równaniu stanu po prawej stronie występuje pochodna, co powinno być naprawione. Można tego dokonać w wyniku podstawienia:

$$u_e = u_{C2} - \frac{C_1}{C_1 + C_2} e$$

skąd można wyznaczyć:  $\frac{du_e}{dt} = \frac{du_{C2}}{dt} - \frac{C_1}{C_1 + C_2} \frac{de}{dt}$  i wstawić do drugiego równania stanu.

# Metoda zmiennych stanu

Ostatecznie prowadzi to do następujących równań stanu i wyjść:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{f}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{f} + \mathbf{D}_1 \frac{d}{dt} \mathbf{f}$$

gdzie:  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} i_L \\ u_e \end{bmatrix}$   $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{R_2}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_1(C_1 + C_2)} \end{bmatrix}$   $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{R_2}{L} & 0 \\ \frac{1}{C_1 + C_2} & \frac{C_2}{R_1(C_1 + C_2)^2} \end{bmatrix}$   $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} j \\ e \end{bmatrix}$

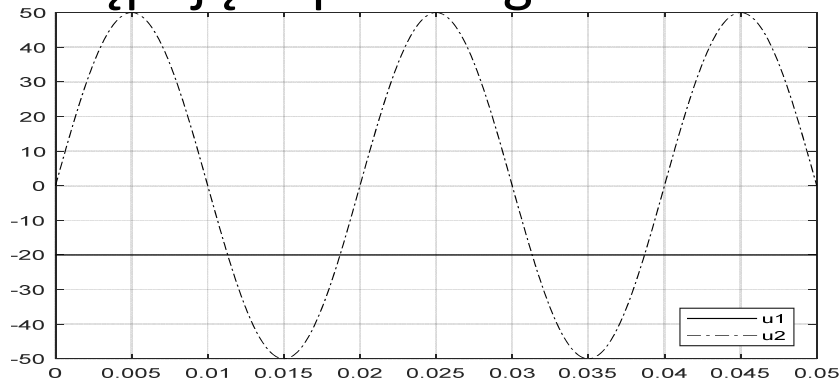
$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} i_L \\ i_{C1} \\ i_{C2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{C_1}{R_1(C_1 + C_2)} \\ 0 & -\frac{C_2}{R_1(C_1 + C_2)} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{C_1}{C_1 + C_2} & -\frac{C_1 C_2}{R_1(C_1 + C_2)^2} \\ \frac{C_2}{C_1 + C_2} & \frac{C_2^2}{R_1(C_1 + C_2)^2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \\ 0 & \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \end{bmatrix}$$

Równania te są rozwiązywane w dwóch formach w programie Matlab:

- w pliku Przyklad\_2\_1.m (script),
- w pliku Przyklad\_2\_1m.slx (model Simulink).

# Metoda zmiennych stanu

Uruchomienie symulacji w programie Przyklad\_2\_1.m generuje następujące przebiegi:



figure(1) – sygnały wejściowe

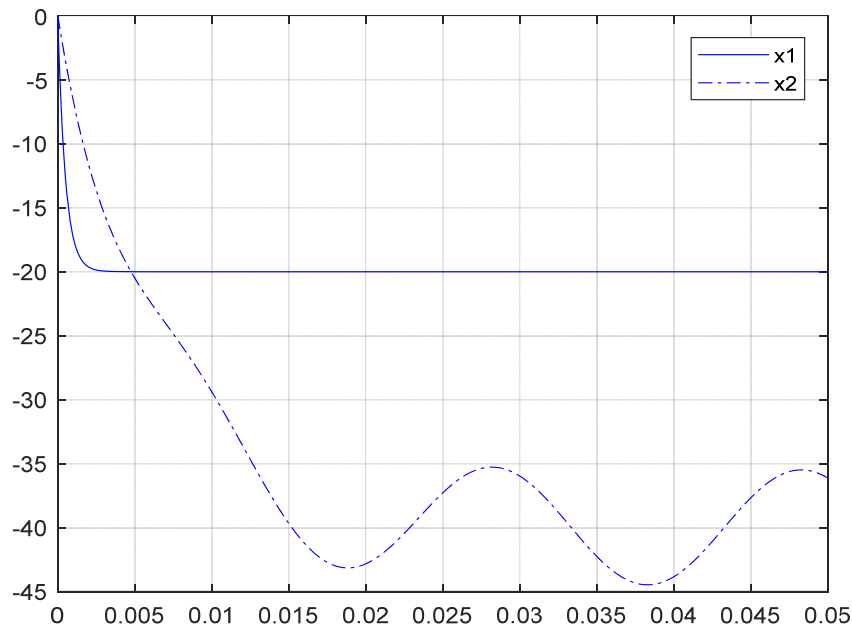
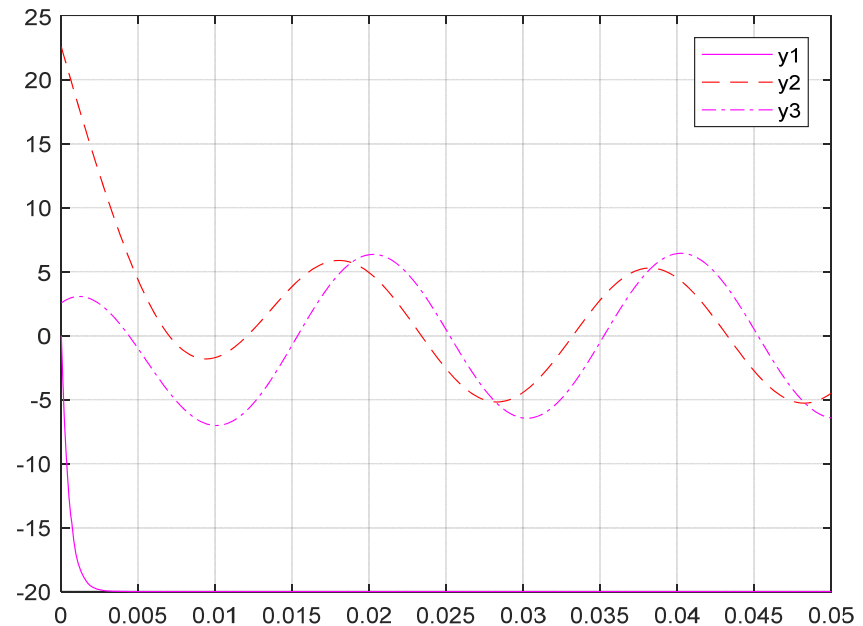


figure (2) – zmienne stanu,



figure(3) – sygnały wyjściowe.

# Metoda zmiennych stanu

## Uwagi/ćwiczenia.

1. Metoda zmiennych stanu w istocie polega na sporządzeniu układów równań różniczkowych dynamiki rozpatrywanej sieci. Liczba tych równań zależy od liczby elementów reaktancyjnych w sieci z uwzględnieniem liczby niezależnych oczek i przekrojów.
2. Symulacja polega na rozwiązywaniu tych równań jako funkcji czasu. Można w tym celu wykorzystać gotowe programy symulacyjne.
3. Na podstawie przedstawionej metody sporządzić modele i wykonać symulacje przedstawionych sieci.

