

# Podstawy Modelowania Systemów

[APR012111W](#)

Eugeniusz Rosołowski

e-mail: [eugeniusz.rosolowski@pwr.edu.pl](mailto:eugeniusz.rosolowski@pwr.edu.pl)

[www.rose.pwr.edu.pl](http://www.rose.pwr.edu.pl)

podręcznik:

*Podstawy Modelowania Systemów*  
*(PMS)*

# Podstawy Modelowania Systemów

Wykład: 15h, środa T/N, 15.15, sala 28 D-1

Zaliczenie: kolokwium zaliczeniowe na ostatnim wykładzie:  
2022-06-22, (1 termin poprawkowy).

Materiały do wykładu:

<https://www.rose.pwr.edu.pl/>

# Modelowanie Systemów

- **Rola modelowania w życiu codziennym**
- **Funkcja modelowania w fizyce i nauce**

„Zbiór modeli matematycznych odnoszących się do jakiejś dziedziny fizyki tworzy jej teorię”.

Weryfikacja zamkniętego zbioru modeli odnoszących się do badanego zjawiska/systemu prowadzi do powstania obowiązującej teorii. Procedurę tę można przedstawić za pomocą znanego schematu:

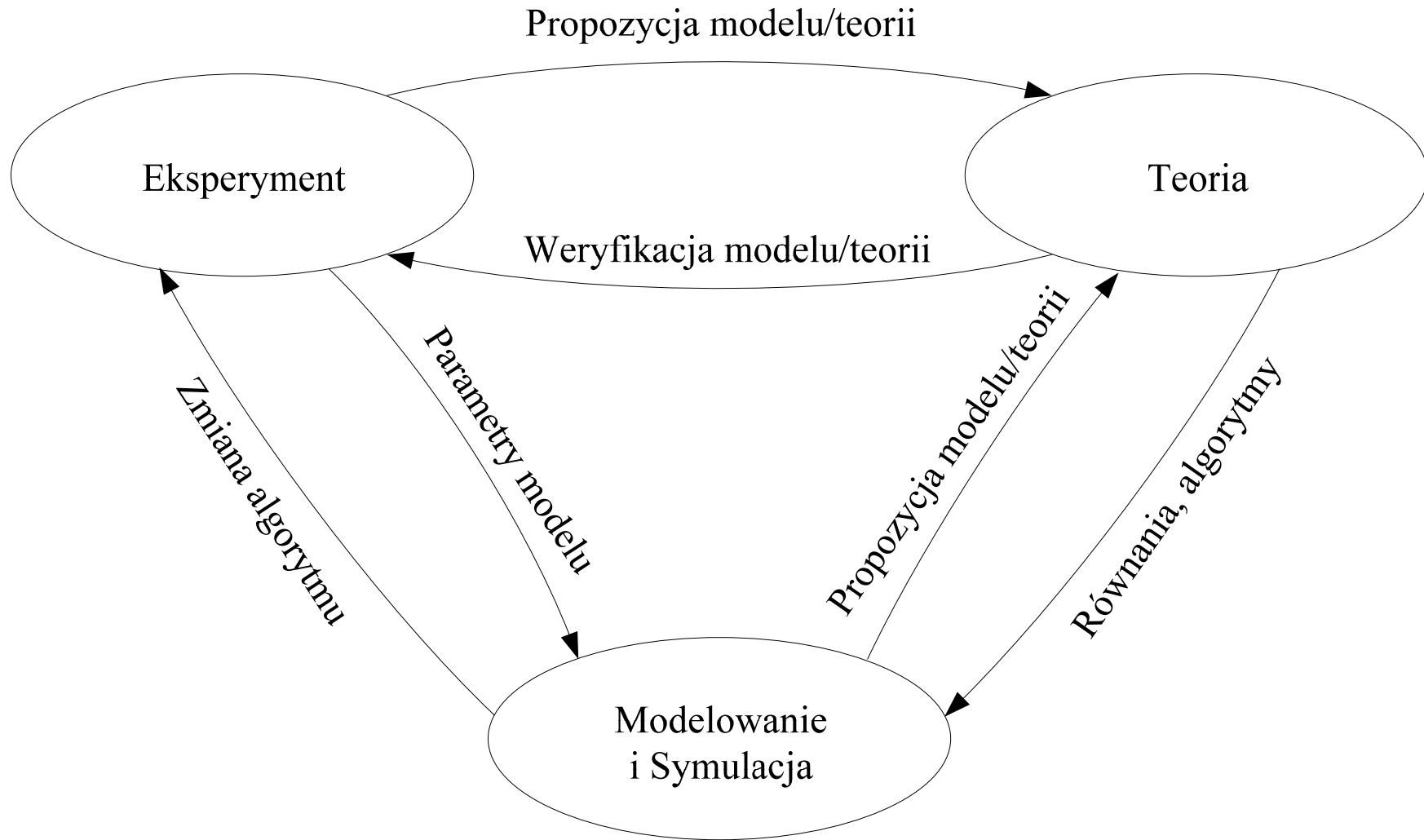
**Teoria (koncepcja)  $\leftrightarrow$  eksperyment (weryfikacja)**

W powyższym schemacie model (matematyczny) jest elementem tworzącej się teorii.

# Modelowanie Systemów

Rozwój techniki komputerowej doprowadził do powstania bardzo wygodnych i elastycznych narzędzi służących do symulacji funkcjonowania modeli. W tym kontekście używa się pojęcia **modelu komputerowego**, przez co należy rozumieć odpowiedni algorytm funkcjonowania modelu. Na podstawie tego algorytmu tworzone są komputerowe programy do wirtualnej realizacji modelu (w środowisku komputerowym).

# Modelowanie Systemów



# Modelowanie Systemów

Główny podział modeli przebiega w zależności od sposobu ich inicjacji (pobudzania) i natury zachodzących procesów:

- modele procesów zachodzących względem czasu (ciągłego lub dyskretnego);
- modele procesów rozpatrywanych względem inicjujących je zdarzeń.

# Modelowanie Systemów

**Procesy opisywane względem czasu** są zazwyczaj dobrze uporządkowane i 'przewidywalne'. Kolejne ich stany zazwyczaj łączą się ze stanami poprzednimi. Ich opis analityczny może bazować na podejściu deterministycznym (matematyczny model deterministyczny) lub probabilistycznym, gdy zakłada się losowy charakter opisujących je funkcji lub ich parametrów.

**Procesy inicjowane zdarzeniami** są z natury losowe (jeśli pominąć przypadek, gdy zdarzenia zachodzą w sposób uporządkowany względem czasu). Zarówno liczba zdarzeń wejściowych w określonej jednostce czasu, jak i długość okresu upływającego pomiędzy kolejnymi zdarzeniami są wielkościami losowymi.

# Modelowanie Systemów

W przypadku procesów opisywanych względem czasu, mamy do czynienia ze **zjawiskami dynamicznymi**, które opisują relacje wejście-wyjście elementów systemu w czasie, pokazując także związane z nimi przebiegi.

**System dynamiczny** charakteryzuje się tym, że jego odpowiedź na dane wymuszenie ma charakter zmienny w czasie. Ponadto, odpowiedź jest funkcją zarówno bieżącego, wymuszenia, jak również historii procesu. **Model analityczny** (matematyczny) jest określony za pomocą odpowiednich równań lub innych adekwatnych relacji, jak wykresy, czy tabele, które opisują system z pewnym przyjętym przybliżeniem. Jeśli relacje te są zapisane w formie programów komputerowych, to mówimy o **komputerowym modelu** systemu.

# Modelowanie Systemów

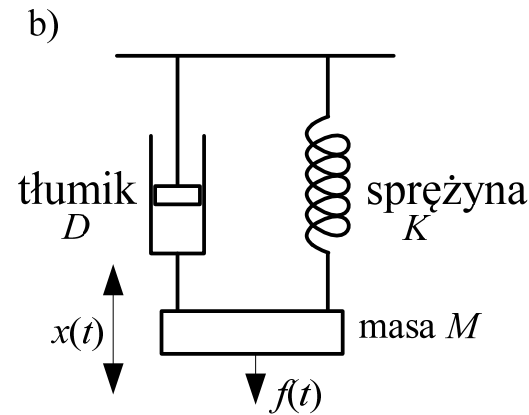
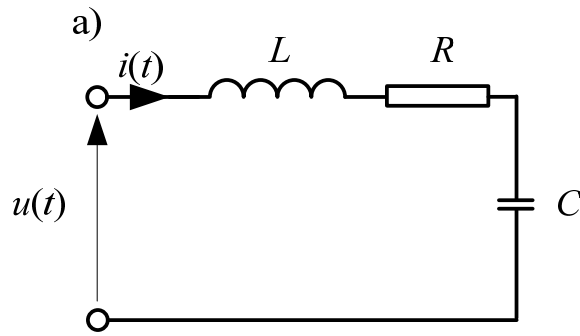
## Model matematyczny:

- *model ciągły* względem czasu
- *dyskretny model systemu*
- *model cyfrowy*

Dynamiczny model komputerowy jest zawsze modelem cyfrowym: z dyskretnym czasem i określoną dokładnością reprezentacji zmiennych procesu i jego parametrów.

# Modelowanie Systemów

## *Model dynamiczny*

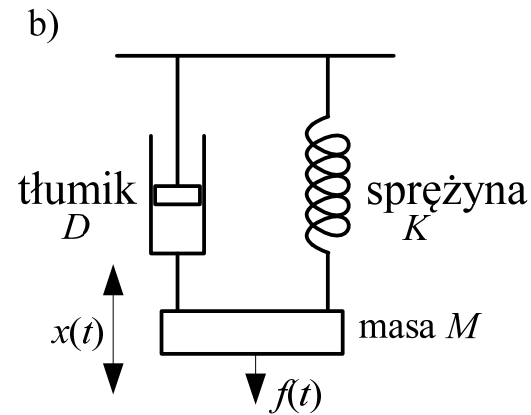
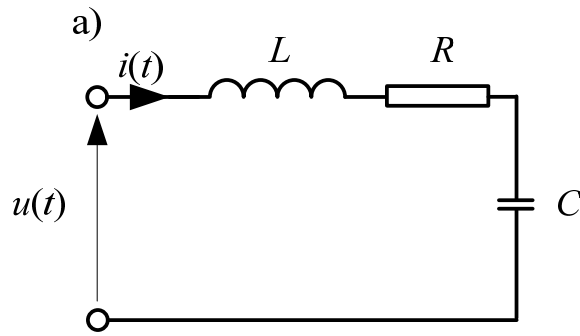


$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

$$L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = 0$$

# Modelowanie Systemów

## *Model dynamiczny*

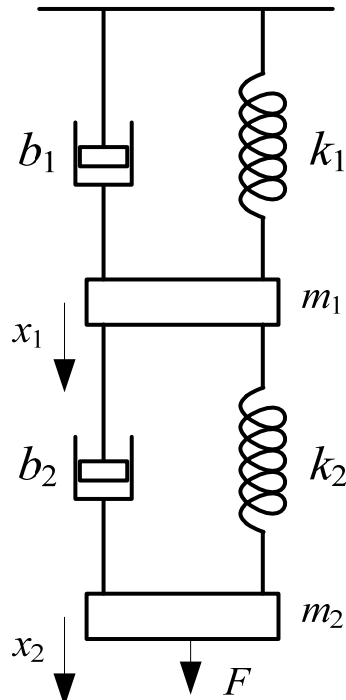


$$f(t) = Dv(t) + M \frac{dv(t)}{dt} + K \int v(t) dt$$

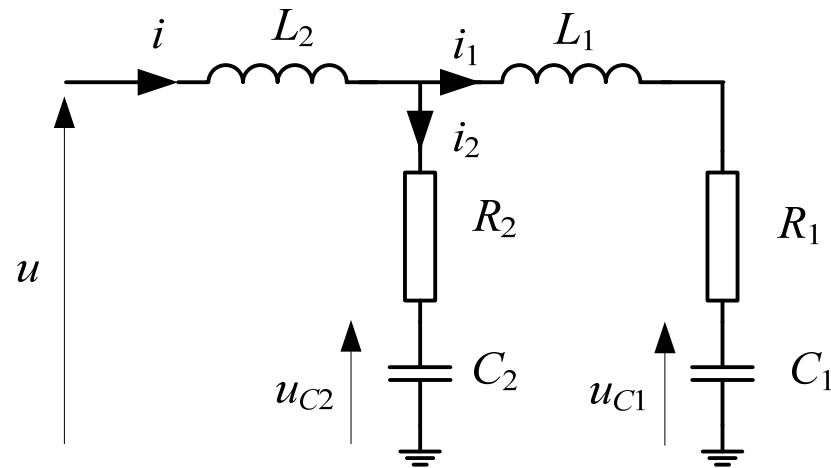
$$M \frac{d^2 v(t)}{dt^2} + D \frac{dv(t)}{dt} + Kv(t) = 0$$

# Modelowanie Systemów

## Równoważność modeli:



$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{dt} &= v_{m2} & \frac{dx_1}{dt} &= v_1 \\ \frac{dv_{m2}}{dt} &= -\frac{1}{m_2} k_2 (x_2 - x_1) - \frac{1}{m_2} b_2 (v_{m2} - v_1) + \frac{1}{m_2} F \\ \frac{dv_1}{dt} &= \frac{k_2}{m_1} x_2 + \frac{b_2}{m_1} v_2 - \frac{k_2}{m_1} x_1 - \frac{b_2}{m_1} v_1 - \frac{k_1}{m_1} x_1 - \frac{b_1}{m_1} v_1 \end{aligned}$$



$$u = L_2 \frac{di}{dt} + R_2 i_2 + u_{C2}$$

$$R_2 i_2 + u_{C2} = L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + u_{C1}$$

$$i_2 = C_2 \frac{du_{C2}}{dt}, \quad i_1 = C_1 \frac{du_{C1}}{dt}, \quad i = i_1 + i_2$$

# Modelowanie Systemów

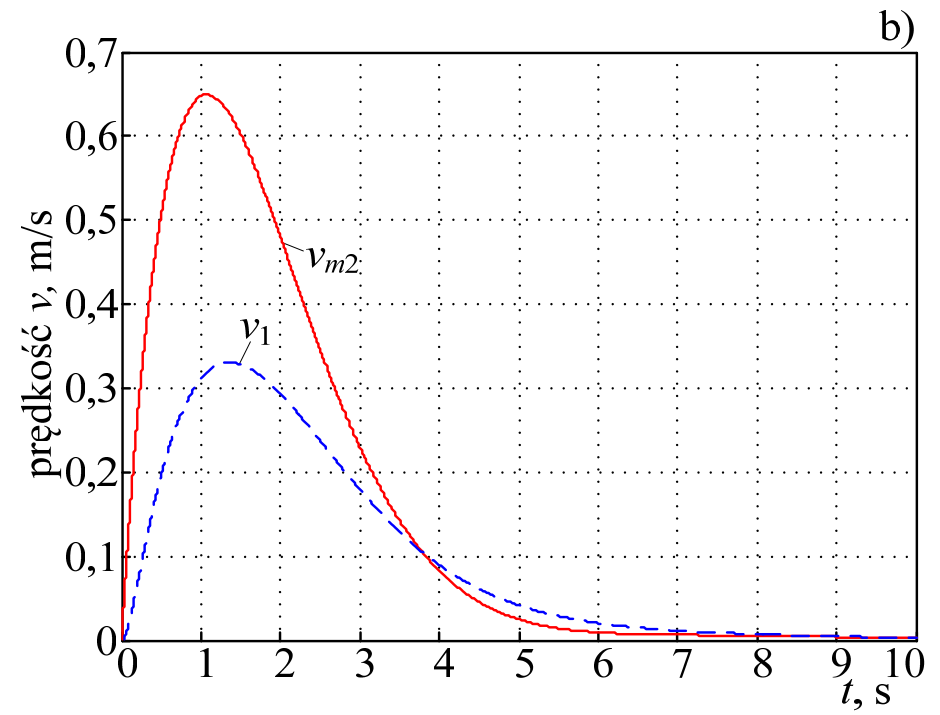
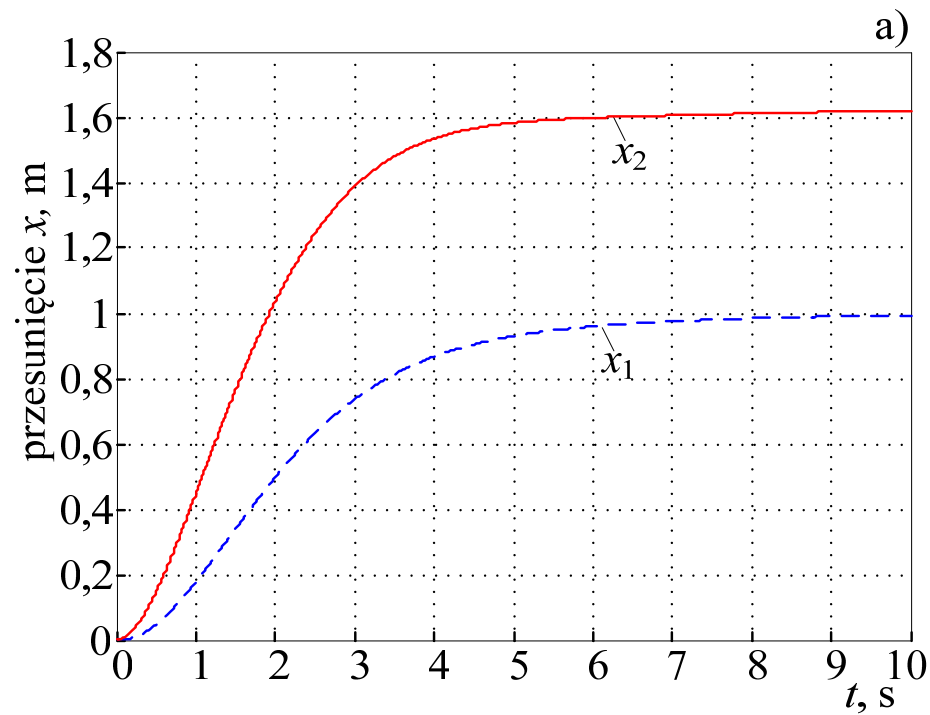
## Równoważność modeli:

Równoważność układu mechanicznego posuwistego z układem elektrycznym

Układ mechaniczny	Układ elektryczny
siła $F$ (N)	napięcie $u$ (V)
prędkość $v$ (m/s)	prąd $i$ (A)
przesunięcie $x$ (m)	ładunek elektryczny $Q$ ( $1\text{C} = 1\text{V}\cdot 1\text{F}$ )
masa $m$ (kg)	indukcyjność $L$ (H)
współczynnik sprężystości $k$ (N/m)	odwrotność pojemności $1/C$ (1/F)
współczynnik tłumienia $b$ (Ns/m)	rezystancja $R$ ( $\Omega$ )
Podstawowe relacje:  masa: $F = m \frac{dv}{dt}$ , $F = \frac{dp}{dt}$ , $p = mv$  sprężyna: $v = \frac{1}{k} \frac{dF}{dt}$ , $v = \frac{dx}{dt}$ , $F = kx$  tłumik: $F = bv$	Podstawowe relacje:  cewka: $u = L \frac{di}{dt}$ , $u = \frac{d\psi}{dt}$ , $\psi = Li$  kondensator: $i = C \frac{du}{dt}$ , $i = \frac{dQ}{dt}$ , $u = \frac{1}{C} Q$  opornik: $u = Ri$

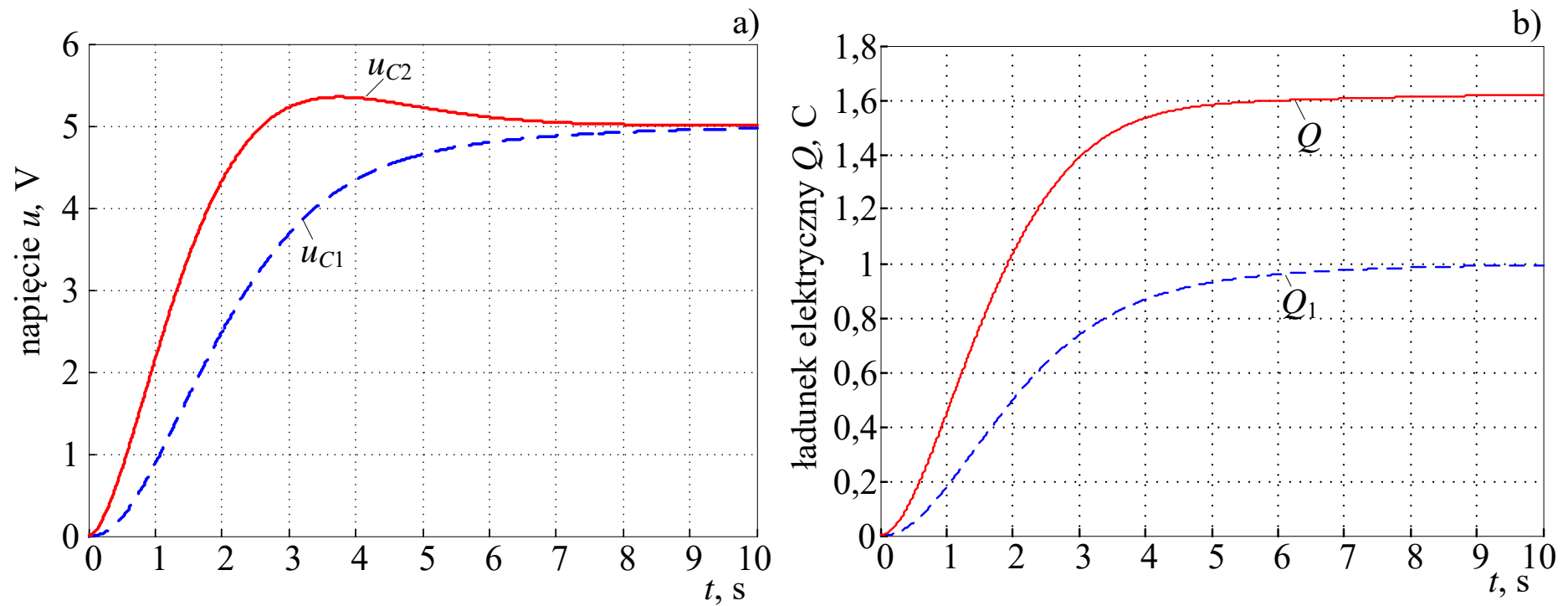
# Modelowanie Systemów

## Wyniki symulacji układu mechanicznego



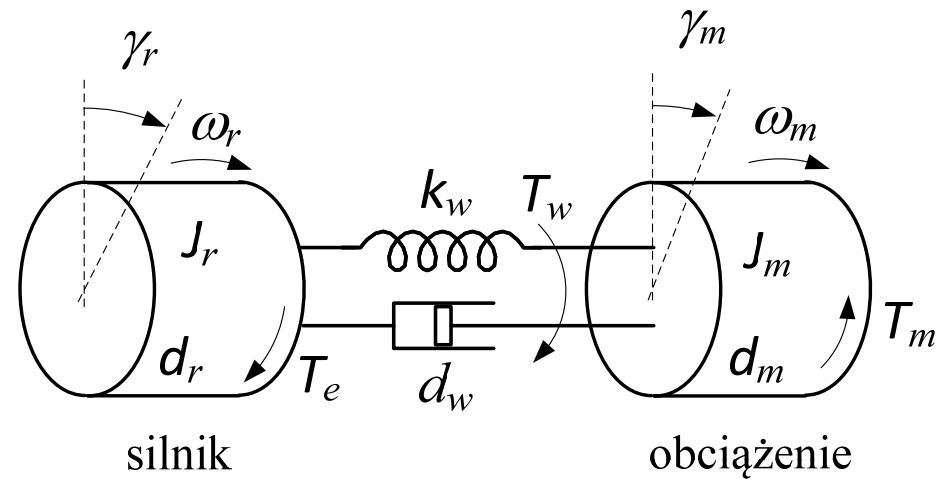
# Modelowanie Systemów

## Wyniki symulacji układu elektrycznego



# Modelowanie Systemów

## Układ mechaniczny wirujący



$$J \frac{d\omega}{dt} + d\omega = T_e - T_m$$

Sprzęgło:

$$d_w \frac{d(\gamma_r - \gamma_m)}{dt} + k_w (\gamma_r - \gamma_m) = T_w$$

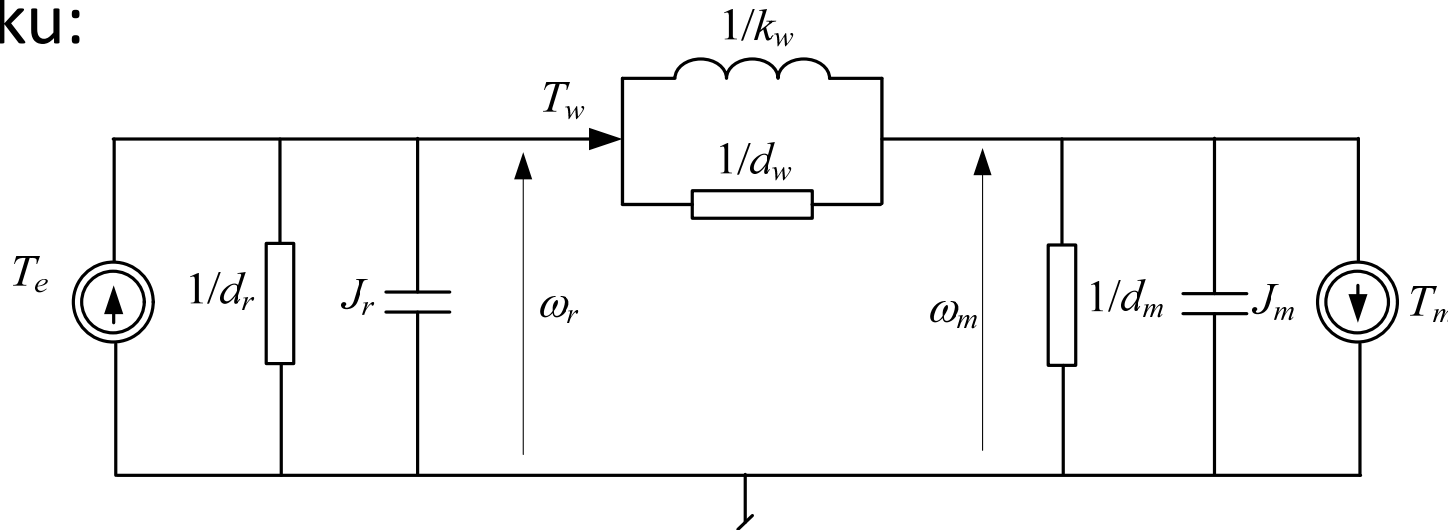
# Modelowanie Systemów

## Równoważność układu obrotowego z układem elektrycznym

Układ mechaniczny obrotowy	Układ elektryczny
moment inercji $J$ ( $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ )	pojemność $C$ (F)
moment obrotowy $T$ ( $\text{N}\cdot\text{m}$ )	prąd $i$ (A)
prędkość kątowna $\omega$ (rad/s)	napięcie $u$ (V)
przesunięcie kątowe $\gamma$ (rad)	strumień magnetyczny $\psi$ (Vs)
współczynnik sprężystości $k$ ( $\text{N}\cdot\text{m}/\text{rad}$ )	odwrotność indukcyjności $1/L$ (1/H)
współczynnik tłumienia skrętu $d$ ( $\text{N}\cdot\text{m s}/\text{rad}$ )	przewodność $1/R$ ( $\text{S} = 1/\Omega$ )
<p>Podstawowe relacje:</p> <p>moment inercji: <math>T = J \frac{d\omega}{dt} = J \frac{d^2\gamma}{dt^2}</math>, <math>\omega = \frac{d\gamma}{dt}</math></p> <p>sprężyna skrętna <math>T = k\gamma</math></p> <p>tłumik: <math>T = d\omega = d \frac{d\gamma}{dt}</math></p>	<p>Podstawowe relacje:</p> <p>kondensator: <math>i = C \frac{du}{dt} = C \frac{d^2\psi}{dt^2}</math>, <math>u = \frac{d\psi}{dt}</math></p> <p>cewka: <math>i = \frac{1}{L} \psi</math></p> <p>przewodność <math>i = \frac{1}{R} u = \frac{1}{R} \frac{d\psi}{dt}</math></p>

# Modelowanie Systemów

Zgodnie z zasadą równoważności, układ wirujący może być przedstawiony w postaci obwodu elektrycznego, jak na rysunku:



**Przykład.** Przeprowadzić analizę powyższego wirującego układu napędowego, z następującymi parametrami: stała inercji silnika  $H_r = 0,84$  s, moment bezwładności obciążenia  $J_m = 28$  kg·m<sup>2</sup>, moc znamionowa silnika  $P_n = 420$  KM przy znamionowej prędkości obrotowej  $n = 1465$  obr/min oraz  $\cos \varphi = 0,86$ .

# Modelowanie Systemów

współczynniki tłumienia:  $d_r = 0,05 \text{ N}\cdot\text{m s/rad}$ ,  $d_m = 0,045 \text{ N}\cdot\text{m s/rad}$ , współczynnik sprężystości sprzęgła:  $k_w = 1500 \text{ N}\cdot\text{m/rad}$ , współczynniki tłumienia sprzęgła przy skręcaniu:  $d_w = 2500 \text{ N}\cdot\text{m s/rad}$ . Przyjąć zerowe warunki początkowe. Założyć, że moment napędowy silnika może być przybliżony za pomocą wzoru Klossa:

$$T_e = \frac{2p_M T_{en}}{s/s_k + s_k/s}$$

gdzie:  $T_{en}$  – moment znamionowy,  $s = \frac{\omega_1 - \omega}{\omega_1}$  – poślizg,  
 $s_k$  – poślizg przy największej wartości momentu  $T_e = T_{ek}$ :

$$s_k = s_n \left( p_M + \sqrt{p_M^2 - 1} \right)$$

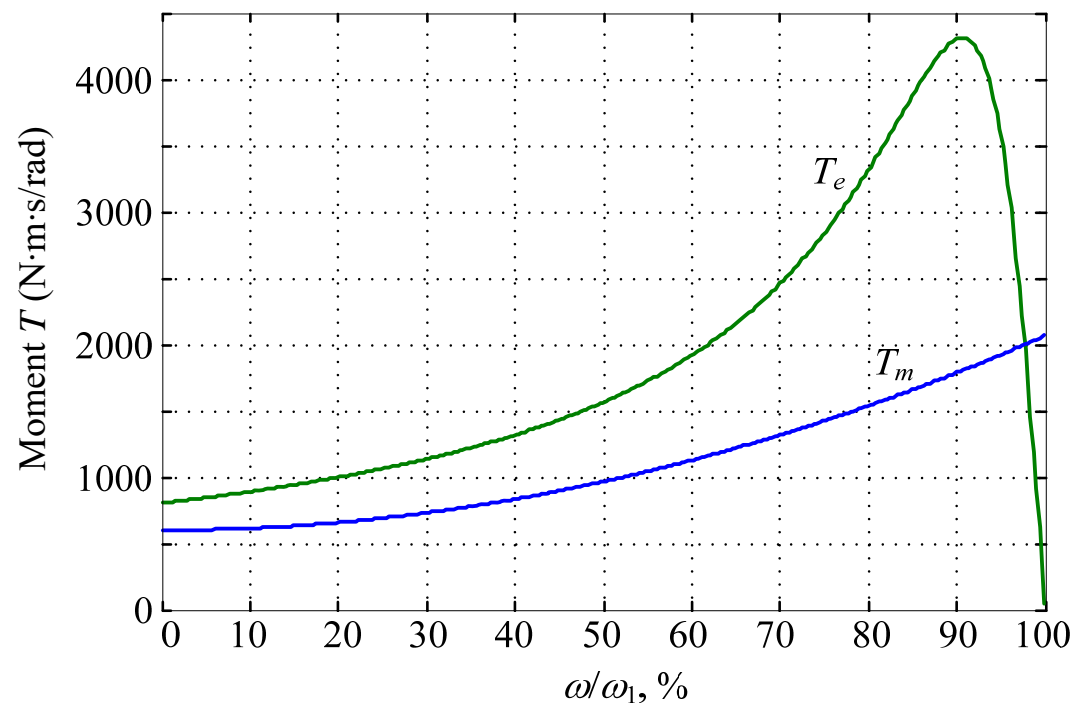
$s_n$  – poślizg przy znamionowym obciążeniu,  $p_M$  – przeciążalność momentem:

# Modelowanie Systemów

$$p_M = T_{ek} / T_{en} = 2,14$$

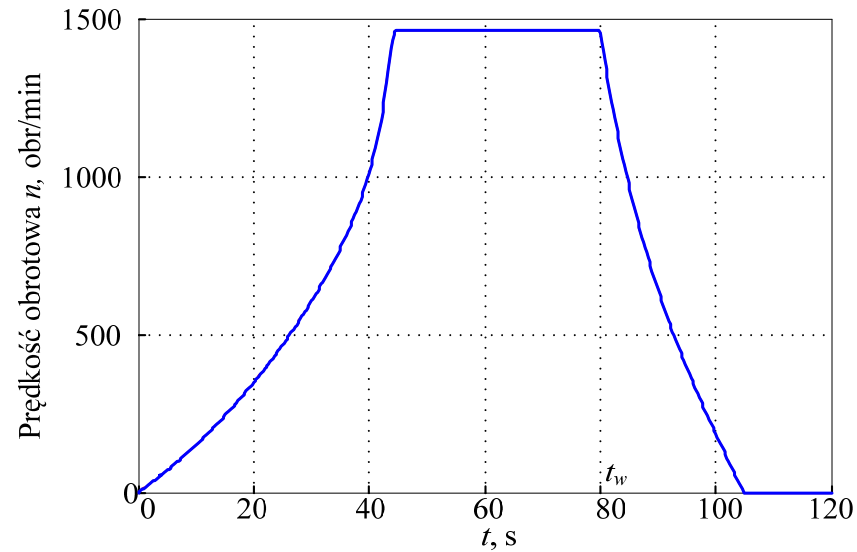
Założyć, że moment obciążenia jest określony za pomocą następującej zależności:  $T_m = T_{m0} \left( 1 + (k_M \omega / \omega_1)^2 \right)$ ,

$T_{m0} = 600,0 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}/\text{rad}$ ,  $k_M = 1,564$ .

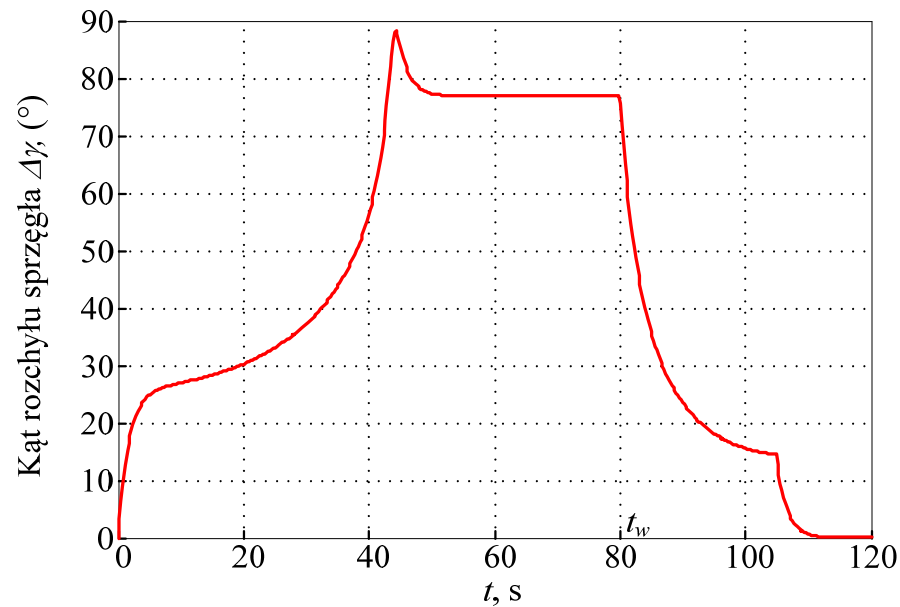


Przebiegi momentów: silnika  $T_e$  oraz obciążenia  $T_m$ .

# Modelowanie Systemów

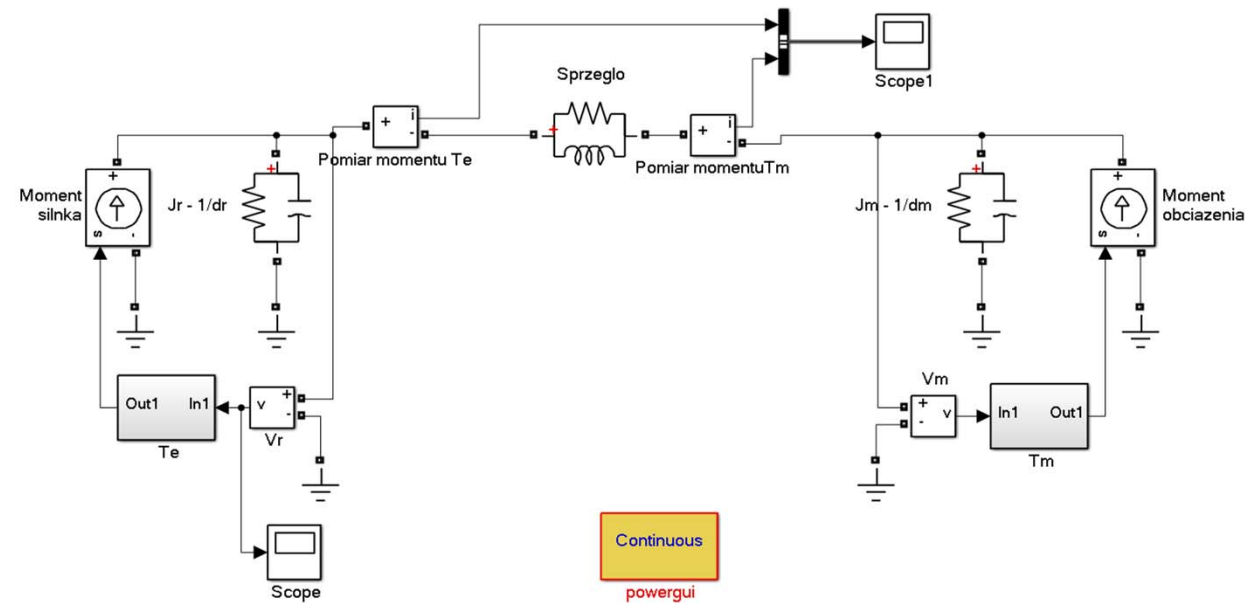


Przebiegi rozruchu i wybiegu układu

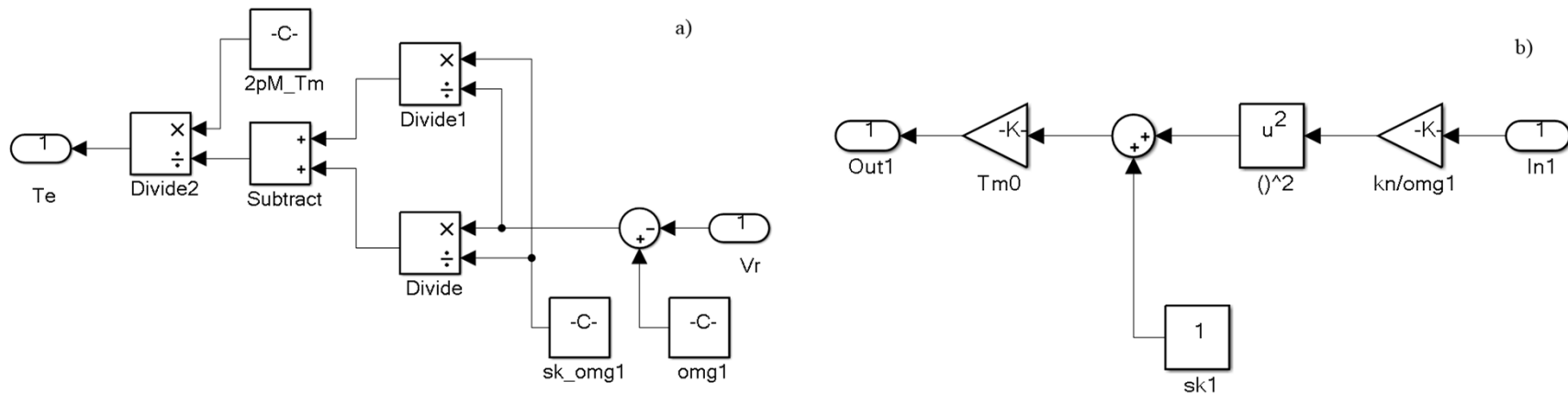


Przebiegi zmian kąta rozchyłu sprzęgła  $\Delta g$

# Modelowanie Systemów



Schemat modelu układu napędowego w programie SimPowerSystems



Sterowanie źródłami prądowymi do odwzorowania: a) - momentu silnika, b) - momentu obciążenia

