

Modele Klasycznej Mechaniki

Klasyczne równania ruchu (równania Newtona) zazwyczaj zapisuje się w następującej postaci:

$$M_j \frac{d^2 x_j}{dt^2} = f_j, \quad j = 3i - l, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad l = 2, 1, 0$$

gdzie: n – liczba punktów materialnych,

l – oznaczenie przestrzeni trójwymiarowej, co razem tworzy $3n$ wymiarową przestrzeń konfiguracyjną, w której punkty są określone przez współrzędne:

$$\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_{3n}]^T$$

f_j – siła działająca na poszczególne punkty.

Modele Klasycznej Mechaniki

W ogólnym przypadku, równanie dynamiki układu, może być ograniczone więzami o liczbie p , które są zdefiniowane przez następujące funkcje:

$$f_k(\mathbf{x}, t) = f_k(x_1, x_2, \dots, x_{3n}, t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p$$

Więzy, określone powyżej, ograniczają ruch poszczególnych punktów układu, redukując swobodę ruchu do m stopni swobody:

$$m = 3n - p$$

Współrzędne uogólnione:

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_m), \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Formalizm Lagrange'a

Równania Lagrange'a dla systemu z wymuszeniem (w więzami) mają następującą postać:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = f_j, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

gdzie: $\mathcal{L} = E_k - E_p$ - funkcja Lagrange'a (lagrangian),

$E_k = E_k(q_j, \dot{q}_j, t)$ - energia kinetyczna,

$E_p = E_p(q_j, t)$ - energia potencjalna

f_j - siła w postaci wymuszenia f_{zj} lub

rozproszenia:

$$f_j = f_{zj} - D_j \dot{q}_j$$

Formalizm Lagrange'a

Istotna różnica pomiędzy **klasycznymi równaniami różniczkowymi** opisującymi ruch układu dynamicznego (równaniami Newtona), a **równaniami Lagrange'a** polega na tym, że w tych ostatnich nie występuje siła i związane z nią pojęcia, jak równowaga sił, siły reakcji. Jej miejsce zajmuje **energia w postaci kinetycznej i potencjalnej**, których różnica definiuje funkcję Lagrange'a $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t)$. Takie ujęcie dynamiki układu jest nazywane **formalizmem Lagrange'a**.

Formalizm Lagrange'a

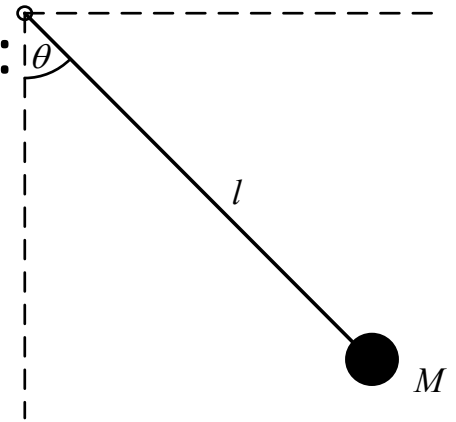
Przykład: Określić równania Lagrange'a ruchu wahadła, zakładając, że jest on tłumiony ze współczynnikiem D .

Wyznaczamy energie: kinetyczną i potencjalną:

$$E_p = E_p(x) = -Mgx, \text{ skąd:}$$

$$E_p(\theta) = -Mgl \cos \theta$$

$$E_k = E_k(v) = \frac{1}{2} Mv^2, \text{ skąd: } E_k(\theta) = \frac{1}{2} Ml^2 \dot{\theta}^2 \quad v = \omega l \quad \omega = \dot{\theta}$$



Funkcja Lagrange'a:

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = E_k(\dot{\theta}) - E_p(\theta) = \frac{1}{2} Ml^2 \dot{\theta}^2 + Mgl \cos \theta$$

Wartości pochodnych:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = Ml^2 \ddot{\theta} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -Mgl \sin \theta$$

Ostatecznie równanie Lagrange'a ruchu wahadła:

$$Ml^2 \ddot{\theta} + D\dot{\theta} + Mgl \sin \theta = 0$$

z uwzględnieniem oporów ruchu: $f = -D\dot{q} = -D\dot{\theta}$

lub w postaci równań stanu:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{D}{Ml^2} x_2 - \frac{g}{l} \sin x_1$$

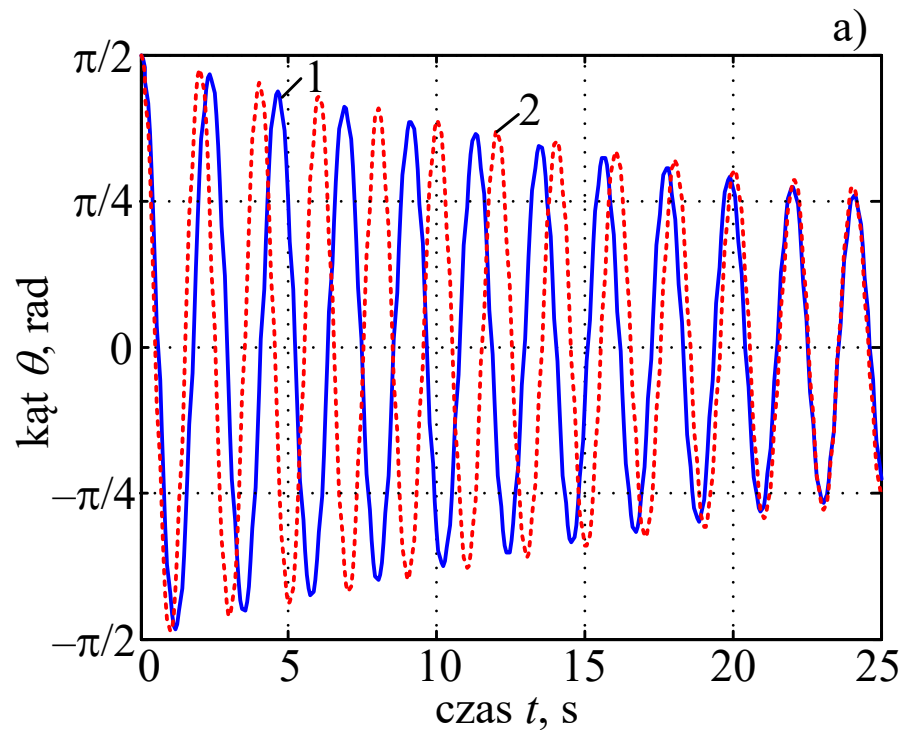
x_1 – kąt wychylenia,

x_2 – prędkość kątowa.

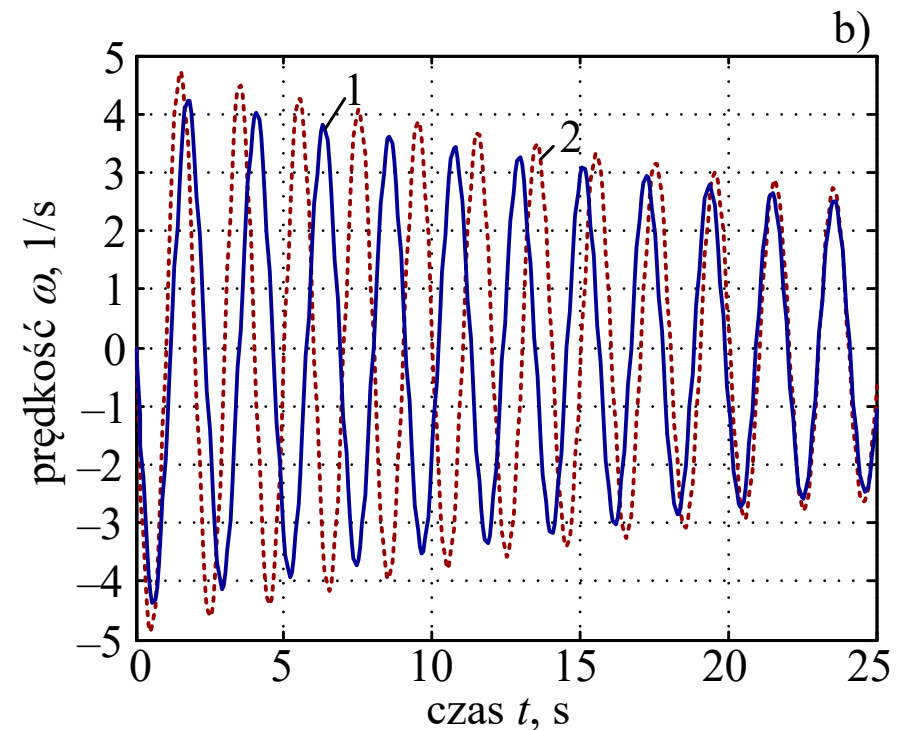
Formalizm Lagrange'a

Ruch wahadła:

położenie



prędkość kątowna



1 – model nieliniowy,

2 – model liniowy.

W modelu Hamiltona pojęcie współrzędnych uogólnionych w postaci **położenia** (q_j) oraz **prędkości** (\dot{q}_j) jest rozszerzone na **pędy uogólnione** (p_j): $(p_1, p_2, \dots, p_m) = (p_j), j = 1, 2, \dots, m$. Dla przesunięcia określonego przez współrzędną uogólnioną q , pęd jest wektorem o wartości: $p = Mv = M\dot{q}$, natomiast dla obrotu o kąt q , uogólniony pęd ma wymiar momentu pędu: $p = J\omega$, gdzie J – moment bezwładności, ω – prędkość kątowa.

$2m$ współrzędnych uogólnionych: m współrzędnych **położenia** oraz m uogólnionych współrzędnych **pędu**: $(q_1, q_2, \dots, q_m; p_1, p_2, \dots, p_m)$.

Współrzędne uogólnione **położenia** (q_j) oraz **pędy uogólnione** (p_j): $(p_1, p_2, \dots, p_m) = (p_j)$, $j = 1, 2, \dots, m$ łączą się przez następującą zależność:

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

Równania Hamiltona:

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial \mathcal{H}(p, q)}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

$$\dot{q}_j = \frac{\partial \mathcal{H}(p, q)}{\partial p_j}, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

gdzie: $\mathcal{H}(p, q) = p\dot{q} - \mathcal{L} = p\dot{q}(p, q) - \mathcal{L}(\dot{q}(p, q), q)$

Funkcja Hamiltona (hamiltonian):

$$\mathcal{H}(p, q) = p\dot{q} - \mathcal{L} = p\dot{q}(p, q) - \mathcal{L}(\dot{q}(p, q), q)$$

Jeśli w układzie odwzorowuje się także straty związane z tarciem, to należy to je uwzględnić w pierwszym z rozpatrywanych równań:

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial \mathcal{H}(p, q)}{\partial q_j} + f_j, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

gdzie f_j – siła reprezentująca straty (tarcie).

Przykład: ruch wahadła opisany równaniami Hamiltona.

Z poprzedniego przykładu:

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} M l^2 \dot{\theta}^2 + M g l \cos \theta$$

Obliczenie pędu: $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = M l^2 \dot{\theta}$

Funkcja Hamiltona:

$$\mathcal{H}(p, q) = p \dot{q} - \mathcal{L} = p \dot{q}(p, q) - \mathcal{L}(\dot{q}(p, q), q) = M l^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} M l^2 \dot{\theta}^2 - M g l \cos \theta$$

Po uporządkowaniu:

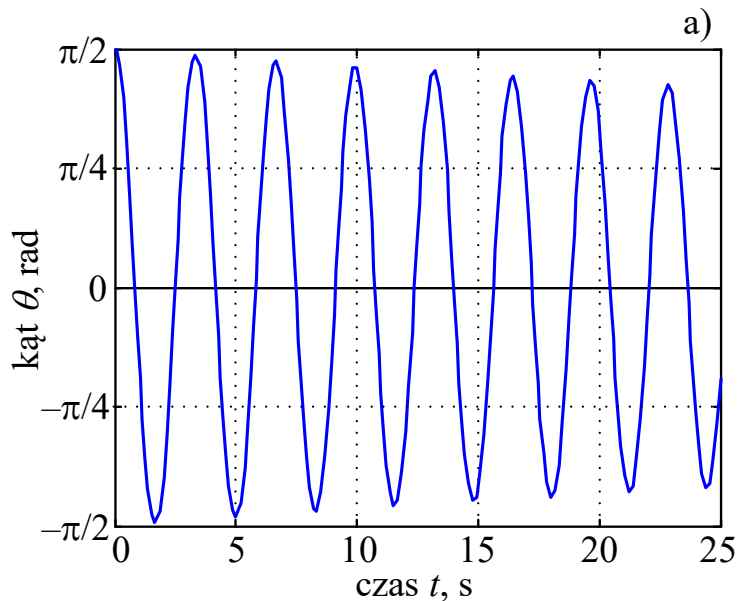
$$\mathcal{H}(p, q) = \mathcal{H}(p, \theta) = \frac{1}{2} M l^2 \dot{\theta}^2 - M g l \cos \theta = \frac{p^2}{2 M l^2} - M g l \cos \theta$$

Równania Hamiltona:

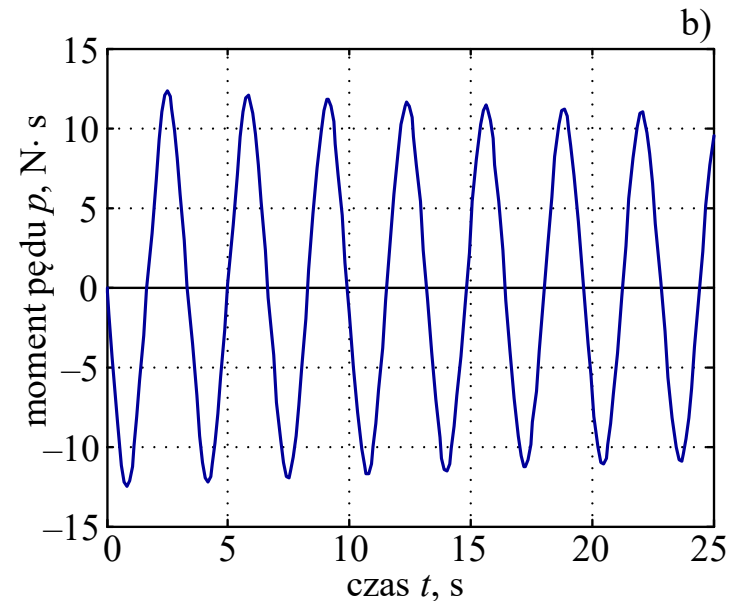
$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}(p, \theta)}{\partial \theta} = -Mgl \sin \theta - \frac{p}{Ml^2} D,$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial \mathcal{H}(p, \theta)}{\partial p} = \frac{p}{Ml^2}$$

położenie θ



moment pędu p



Obwód elektryczny – równania Lagrange'a

Równanie Lagrange'a – metoda oczkowa – współrzędne są związane z ładunkiem elektrycznym q :

$$\mathcal{L} = E_k - E_p = \frac{1}{2} L \dot{q}^2 - \frac{q^2}{2C},$$

$$E_R = \frac{1}{2} R \dot{q}^2, \quad u_R = R \dot{q}, \quad f = u(t)$$

gdzie: $q = Cu_C$ – ładunek elektryczny w kondensatorze,
 $\dot{q} = dq/dt$ – prąd, u_R – spadek napięcia na oporniku.

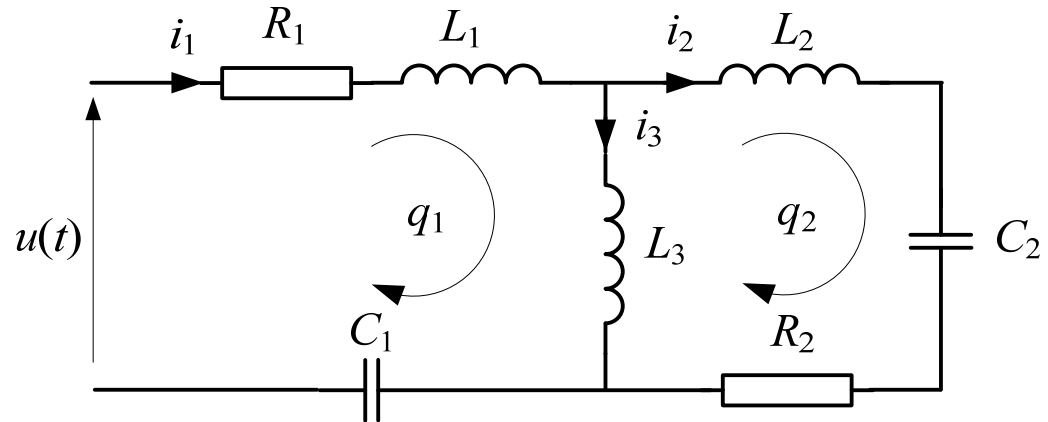
Funkcja Lagrange'a w obwodzie elektrycznym:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} + \frac{\partial E_R}{\partial \dot{q}_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} + R_j \dot{q}_j = f_j, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

Obwód elektryczny – równania Lagrange'a

Przykład:

Prądy w gałęziach:



$$i_1 = \dot{q}_1 = \frac{dq_1}{dt} \quad i_2 = \dot{q}_2 = \frac{dq_2}{dt} \quad i_3 = \dot{q}_1 - \dot{q}_2 = i_1 - i_2$$

Energia kinetyczna jest związana z energią gromadzoną w indukcyjnościach:

$$E_k = \frac{1}{2} L_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} L_3 (\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2 + \frac{1}{2} L_2 \dot{q}_2^2$$

Obwód elektryczny – równania Lagrange'a

Energia potencjalna jest związana z energią gromadzoną w kondensatorach:

$$E_p = \frac{1}{2} \frac{q_1^2}{C_1} + \frac{1}{2} \frac{q_2^2}{C_2}$$

Energia wydzielana w opornikach:

$$E_R = \frac{1}{2} R_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} R_2 \dot{q}_2^2$$

Równania Lagrange'a dla obu współrzędnych:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_1} + \frac{\partial E_p}{\partial q_1} + \frac{\partial E_R}{\partial \dot{q}_1} &= u(t), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_2} + \frac{\partial E_p}{\partial q_2} + \frac{\partial E_R}{\partial \dot{q}_2} &= 0 \end{aligned}$$

Obwód elektryczny – równania Lagrange'a

Składniki równań Lagrange'a:

$$\frac{\partial E_k}{\partial q_1} = 0 \qquad \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_1} = (L_1 + L_3)\dot{q}_1 - L_3\dot{q}_2$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial q_2} = 0 \qquad \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_2} = (L_1 + L_3)\dot{q}_2 - L_3\dot{q}_1$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial q_1} = \frac{q_1}{C_1} \qquad \frac{\partial E_p}{\partial q_2} = \frac{q_2}{C_2}$$

$$\frac{\partial E_R}{\partial \dot{q}_1} = R_1\dot{q}_1 \qquad \frac{\partial E_R}{\partial \dot{q}_2} = R_2\dot{q}_2$$

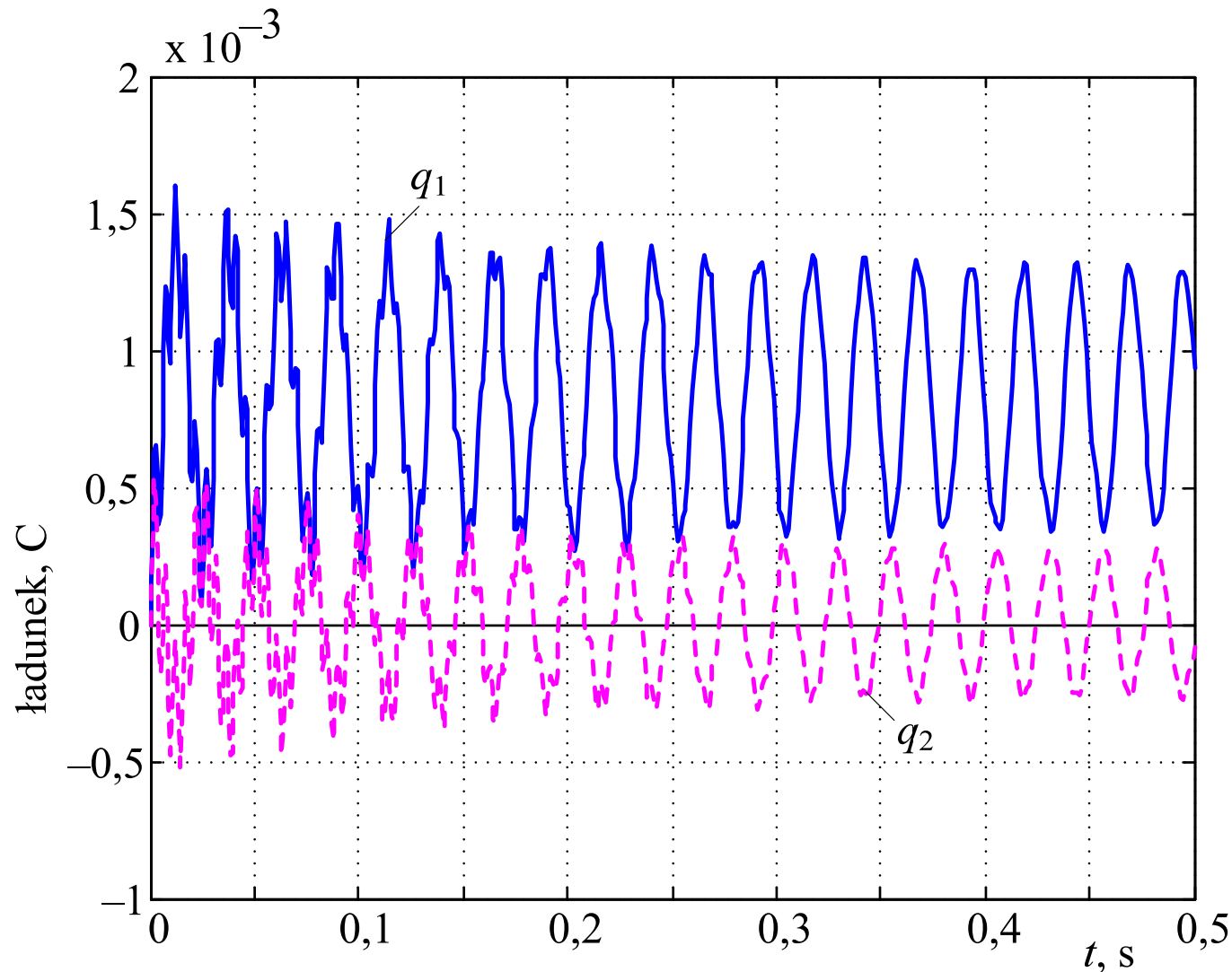
co prowadzi do równań Lagrange'a o postaci:

$$(L_1 + L_3)\ddot{q}_1 - L_3\ddot{q}_2 + \frac{q_1}{C_1} + R_1\dot{q}_1 = u(t),$$

$$-L_3\ddot{q}_1 + (L_2 + L_3)\ddot{q}_2 + \frac{q_2}{C_2} + R_2\dot{q}_2 = 0$$

Obwód elektryczny – równania Lagrange'a

Dynamika zmian ładunków elektrycznych:



Obwód elektryczny – równania Lagrange'a

Równania Lagrange'a – metoda węzłowa:

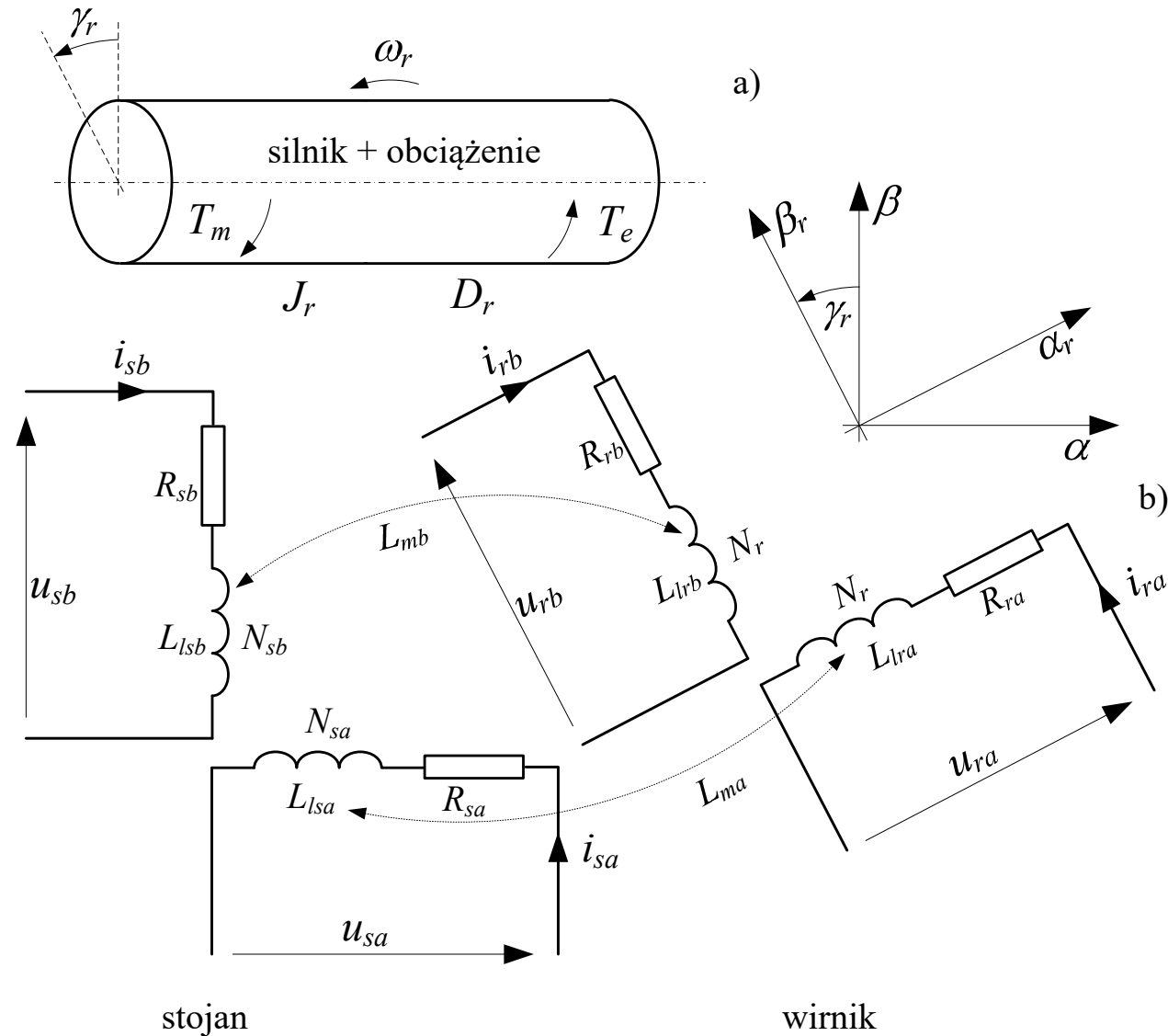
w charakterze współrzędnych w równaniach Lagrange'a przyjmuje się strumienie elektromagnetyczne, które są związane z napięciami w węzłach obwodu elektrycznego: $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$.
Zatem, zmienna λ_k oznacza wielkość strumienia elektromagnetycznego związanego z k -tym węzłem:

$$\lambda_k = \int_{t_0}^t u_k(\tau) d\tau \quad u_k = \frac{d\lambda_k}{dt} = \dot{\lambda}_k$$

Energia kinetyczna – energia zgromadzona w kondensatorach, energia potencjalna – energia zgromadzona w indukcyjnościach, energia tracona – na

Obwód elektryczny – równania Lagrange'a

Przykład – silnik dwufazowy:



Obwód elektryczny – równania Lagrange'a

Silnik dwufazowy – metoda oczkowa:

równania Lagrange'a:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_j} + \frac{\partial E_p}{\partial q_j} + \frac{\partial E_R}{\partial \dot{q}_j} = Q_j, j = 1, 2, \dots, 5$$

wymuszenia: $Q_1 = u_{sa}$, $Q_2 = u_{sb}$, $Q_3 = u_{ra}$, $Q_4 = u_{rb}$, $Q_5 = T_e - T_m$;

energia kinetyczna gromadzona w indukcyjnościach:

$$E_k = \frac{1}{2} L_{sa} \dot{q}_1^2 + L_{ma} \dot{q}_1 \dot{q}_3 \cos q_5 - L_{ma} \dot{q}_1 \dot{q}_4 \sin q_5 + \frac{1}{2} L_{sb} \dot{q}_2^2 + L_{mb} \dot{q}_2 \dot{q}_3 \sin q_5 + L_{mb} \dot{q}_2 \dot{q}_4 \cos q_5 \\ + \frac{1}{2} L_{ra} \dot{q}_3^2 + \frac{1}{2} L_{rb} \dot{q}_4^2 + \frac{1}{2} J_r \dot{q}_5^2$$

Program został zapisany w pliku:

`silnik_2_fazowy_strumien.mdl`

Obwód elektryczny – równania Lagrange'a

Silnik dwufazowy – metoda oczkowa:

