

# Modele Procesów Fizycznych - tarcie

Przykłady procesów fizycznych:

- Zjawisko tarcia
  - tarcie suche
  - tarcie lepkie
- Przepływ płynu
- Przepływ ciepła

## Zjawisko tarcie

Siła tarcia  $T$  jest rozumiana, jako siła oporu powstająca przy wzajemnym przesuwaniu się dwóch ciał. Siła  $T$  leży w płaszczyźnie stycznej do powierzchni obu ciał, poprowadzonej w punkcie styku. Ma ona kierunek i zwrot przeciwny do prędkości względnej punktu styku.

Tarcie jest ogólnie dzielone na:

- Tarcie suche
- Tarcie lepkie

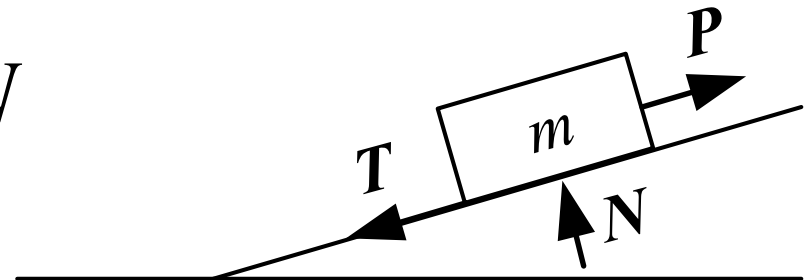
## Tarcie suche

W przypadku tarcia suchego zakłada się, że pomiędzy przesuwającymi się powierzchniami nie ma materiału pośredniczącego, w szczególności, brak jest warstwy smarnej. Do analitycznego opisu tarcia wprowadza się zazwyczaj następujące założenia:

- siła tarcia jest proporcjonalna do siły  $N$  normalnej do powierzchni tarcia:

$$T = \mu_k N$$

gdzie  $\mu_k$  – kinetyczny współczynnik tarcia;



## Tarcie suche

- siła tarcia jest niezależna od powierzchni styku;
- siła tarcia jest niezależna od prędkości przemieszczania się ciał;
- do przesunięcia nieruchomego ciała niezbędna jest siła  $T_{gr}$ , która jest określana podobnie:

$$T = \mu_s N$$

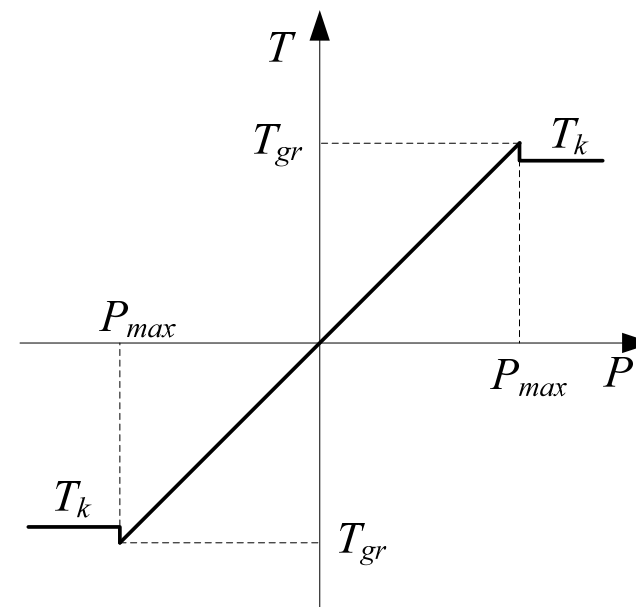
przy czym:  $\mu_s \geq \mu_k$  – współczynnik tarcia statycznego (który także nie zależy od wielkości powierzchni styku).

## Tarcie suche

Jeśli uwzględnić kierunek ruchu przesuwanego elementu, to powyższa zależność przybiera następującą postać:

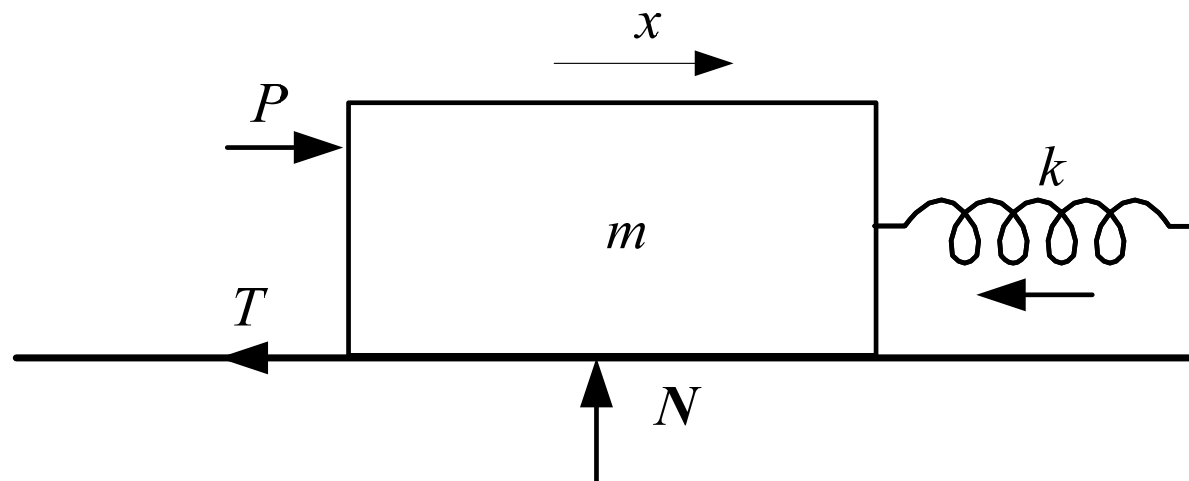
$$T = \mu_k N \operatorname{sgn}(v) = \mu_k N \operatorname{sgn}(\dot{x})$$

Zazwyczaj po uruchomieniu układu, opór tarcia nieco maleje, co wynika z relacji:  $\mu_s \geq \mu_k$ , co oznacza, że opór tarcia kinetycznego  $T_k$  jest mniejszy od tarcia granicznego  $T_{gr}$ .



## Tarcie suche

**Przykład.** Przeanalizować dynamikę podanego układu. Stała sprężyny wynosi  $k$ , natomiast przesuwany element ma masę  $m$ . Założyć, że układ może się znajdować w jednym z dwóch stanów:  
a) przy braku poślizgu: oraz b) w ruchu:



## Tarcie suche

Zewnętrzne siły działające na układ są następujące (siła  $P$  oraz przeciwnie skierowana siła sprężyny):

$$P_{zew} = P - kx$$

Gdy układ znajduje się w ruchu, który charakteryzuje się obecnością prędkości przesuwania, można zapisać następującą równowagę sił:

$$m \cdot a = m \cdot \ddot{x} + T_{gr} = P_{zew}$$

$a$  – przyspieszenie masy  $m$

zatem:

$$m\ddot{x} = P_{zew} - \mu_k N \operatorname{sgn}(\dot{x}) = P_{zew} - T_{gr} \operatorname{sgn}(\dot{x})$$

## Tarcie suche

skąd, dla  $v = \dot{x} \neq 0$ :

$$\ddot{x} = \frac{P_{zew} - T_k \operatorname{sgn}(\dot{x})}{m}, \quad T_k = \mu_k N$$

Dla ogólności, zapiszmy w podobny sposób stan układu przy braku poślizgu, przy czym, wprowadzimy dodatkową funkcję, która wykrywa kierunek działania, zmierzającego do przesunięcia masy  $m$  z udziałem siły  $P_{zew}$ :

$$p_{rz}(p) = \begin{cases} p & \text{dla } |p| < 1 \\ \operatorname{sgn}(p) & \text{inaczej} \end{cases} \quad \text{gdzie: } p = \frac{P_{zew}}{T_{gr}}$$

## Tarcie suche

Prowadzi to do następującej modyfikacji równania dynamiki układu w stanie spoczynkowym:

$$\ddot{x} = \frac{P_{zew} - T_{gr} p_{rz} \left( \frac{P_{zew}}{T_{gr}} \right)}{m}, \text{ gdzie: } T_{gr} = \mu_s N$$

Po rozdzieleniu powyższego równania na dwa równania pierwszego rzędu, otrzymamy:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (\text{przesunięcie})$$

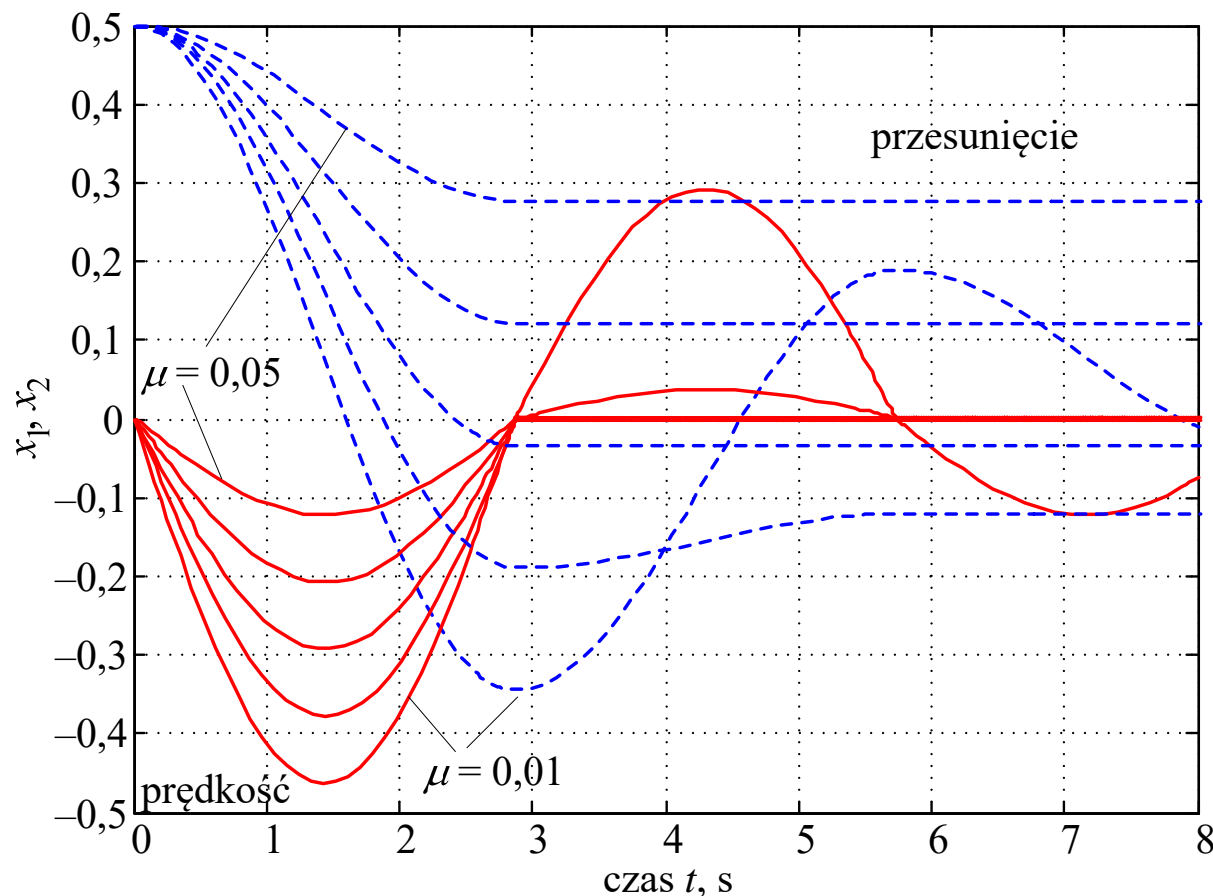
$$\dot{x}_2 = \frac{P_{zew} - T_{gr} \operatorname{sgn}(x_1)}{m} \quad - \text{jeśli } x_2 \neq 0$$

$$\dot{x}_2 = \frac{P_{zew} - T_{gr} p_{rz} \left( \frac{P_{zew}}{T_{gr}} \right)}{m} \quad (\text{prędkość})$$

- inaczej

## Tarcie suche

Na podstawie powyższych równań został opracowany program *tarcie\_1.m* w języku Matlab (dostępny w Dodatku).



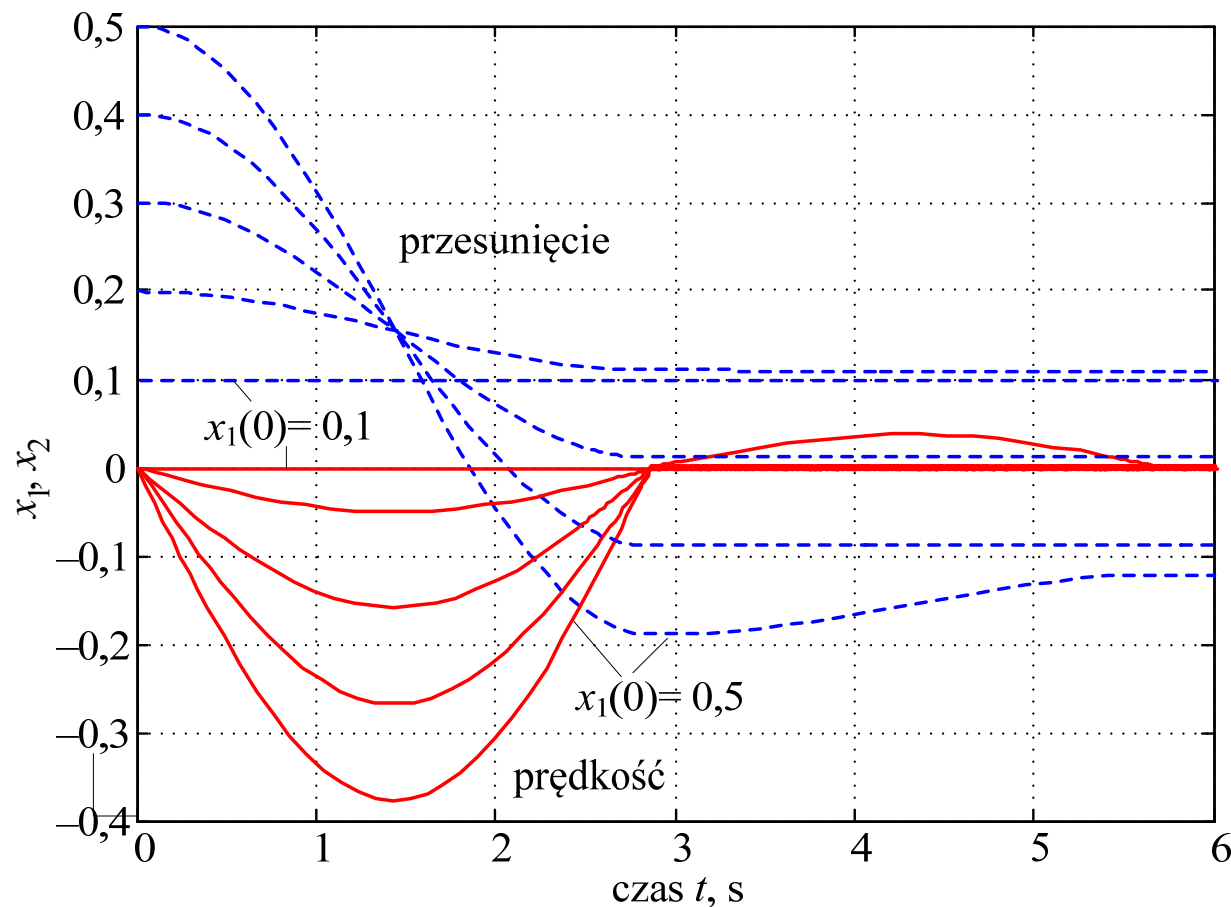
$$m = 1, k = 1,2$$

$$P = 0,$$

$$(x_1(0); x_2(0)) = (0,5; 0)$$

# Tarcie suche

Przebiegi przesunięcia ( $x_1$ ) oraz prędkości ( $x_2$ ) przy różnych początkowych wartościach przesunięcia



$$m = 1,$$

$$k = 1,2$$

$$m = 0,02$$

## Tarcie lepkie

Tarcie lepkie (płynne) jest siłą oporu  $T$  występującego w szczelinie pomiędzy dwoma przemieszczającymi się ciałami, gdy szczelina ta jest wypełniona płynem lub gazem. Przy tworzeniu modelu tego zjawiska zakłada się, że:

- $T$  nie zależy od siły docisku pomiędzy przesuwającymi się ciałami;
- $T$  zależy natomiast od prędkości przesuwania  $v$  oraz od pola powierzchni styku  $S$ ;
- tarcie płynne w sposób zasadniczy zależy od właściwości materiału wypełniającego szczelinę dzielącą powierzchnie obu ciał.

## Tarcie lepkie

$$T = \mu_l \dot{x}$$

gdzie  $\mu_l$  jest współczynnikiem tarcia lepkiego.

W przypadku nieściśliwej cieczy wypełniającej szczelinę, siła tarcia jest reprezentowana za pomocą następującej zależności:

$$T = \eta S \frac{\partial v}{\partial h}$$

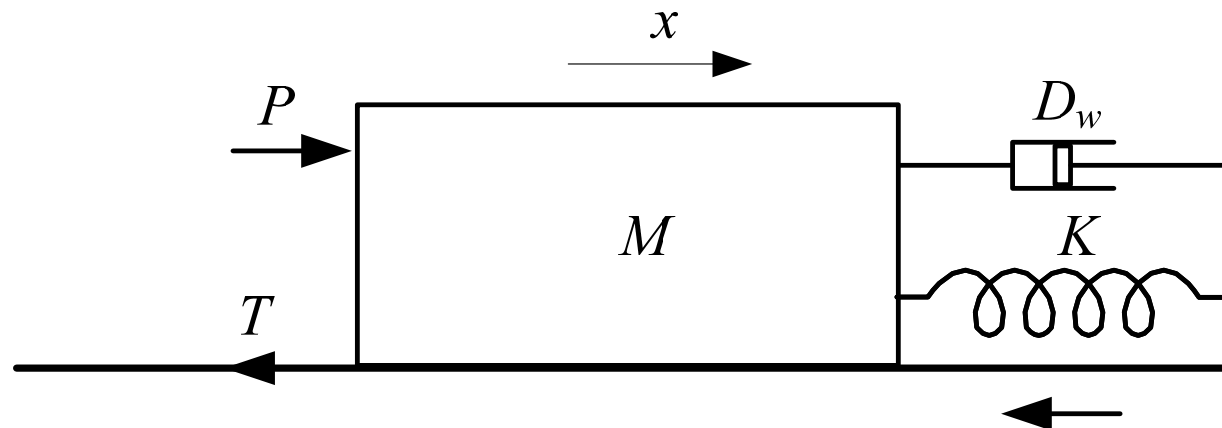
gdzie:  $\eta$  - współczynnik lepkości cieczy,  $\frac{\partial v}{\partial h}$  - gradient prędkości w szczelinie.

## Tarcie lepkie

Tarcie lepkie jest często łączone z tłumieniem ruchu ciała o masie  $M$ . W takim przypadku, można posłużyć się schematem, jak na rysunku, któremu odpowiada następujące równanie:

$$M\ddot{x} + D_w\dot{x} + Kx = 0$$

gdzie:  $D_w$  jest współczynnikiem tłumienia wiskotycznego.



## Tarcie lepkie

Tym razem, w modelu tarcia nie występuje ograniczenie ruchu w związku z oporem granicznym  $T_{gr}$ , więc w przebiegu oscylacji tego układu nie występuje gwałtowne ich zanikanie.

