

Modelowanie Nieliniowych Systemów Dynamicznych

Dynamika systemów jest odtwarzana za pomocą modeli zależnych od czasu. W ogólnym przypadku, czas może być reprezentowany w postaci ciągłej lub dyskretnej. W zależności od tego, stosowane modele są formułowane w postaci równań różniczkowych (czas ciągły) lub równań różnicowych (czas dyskretny).

W odniesieniu do **systemów liniowych** stosowane są dobrze poznane, uniwersalne narzędzia analityczne, które pozwalają badać ich stabilność oraz różnorodne charakterystyki w dziedzinie czasu i częstotliwości. W przeciwieństwie do tego, narzędzia badania **systemów nieliniowych** są często ograniczone do ściśle określonej grupy systemów.

Równanie Van der Pola

Równanie **Van der Pola** opisuje oscylacje w układzie elektronicznym ze wzmacniaczem (oryginalnie z zastosowaniem lampy typu trioda). Dynamika układu jest określona za pomocą następującego równania nieliniowego:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - \mu(1 - y^2) \frac{dy}{dt} + y = 0$$

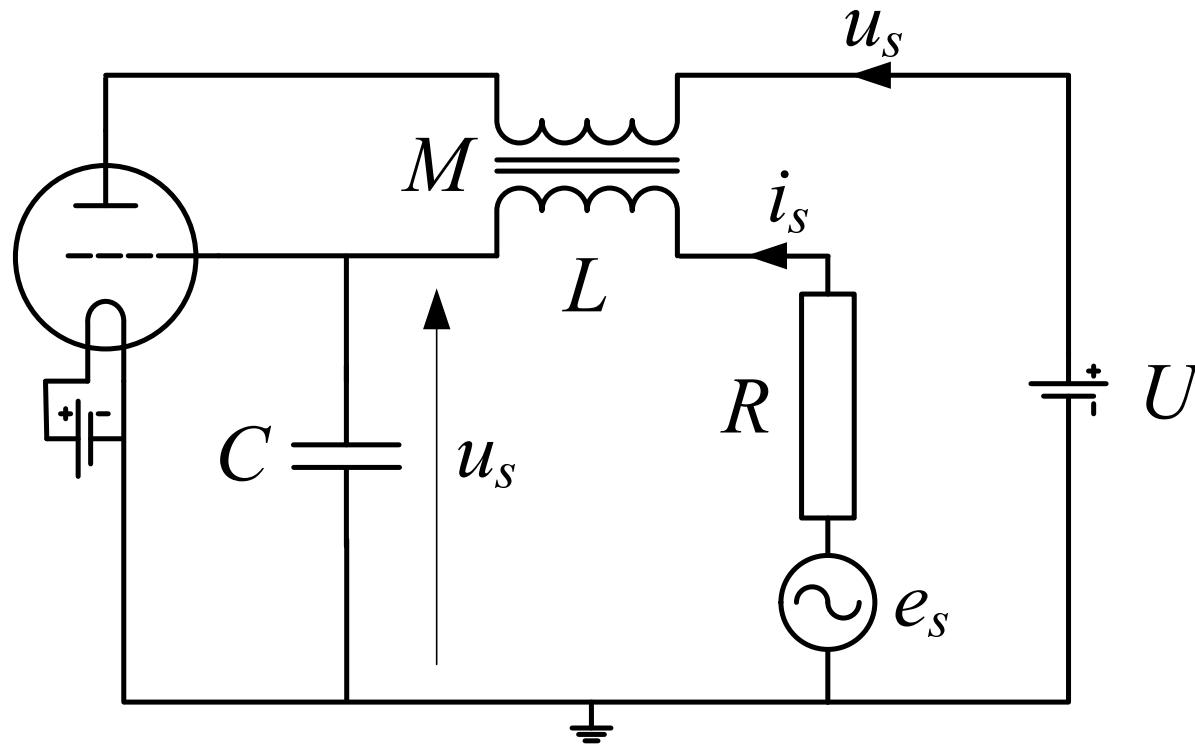
gdzie μ – współczynnik tłumienia.

Równanie (3.1) można zapisać w postaci układu równań pierwszego rzędu:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \mu(x - y^2 x - y) \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{x}{\mu} \end{aligned}$$

Równanie Van der Pola

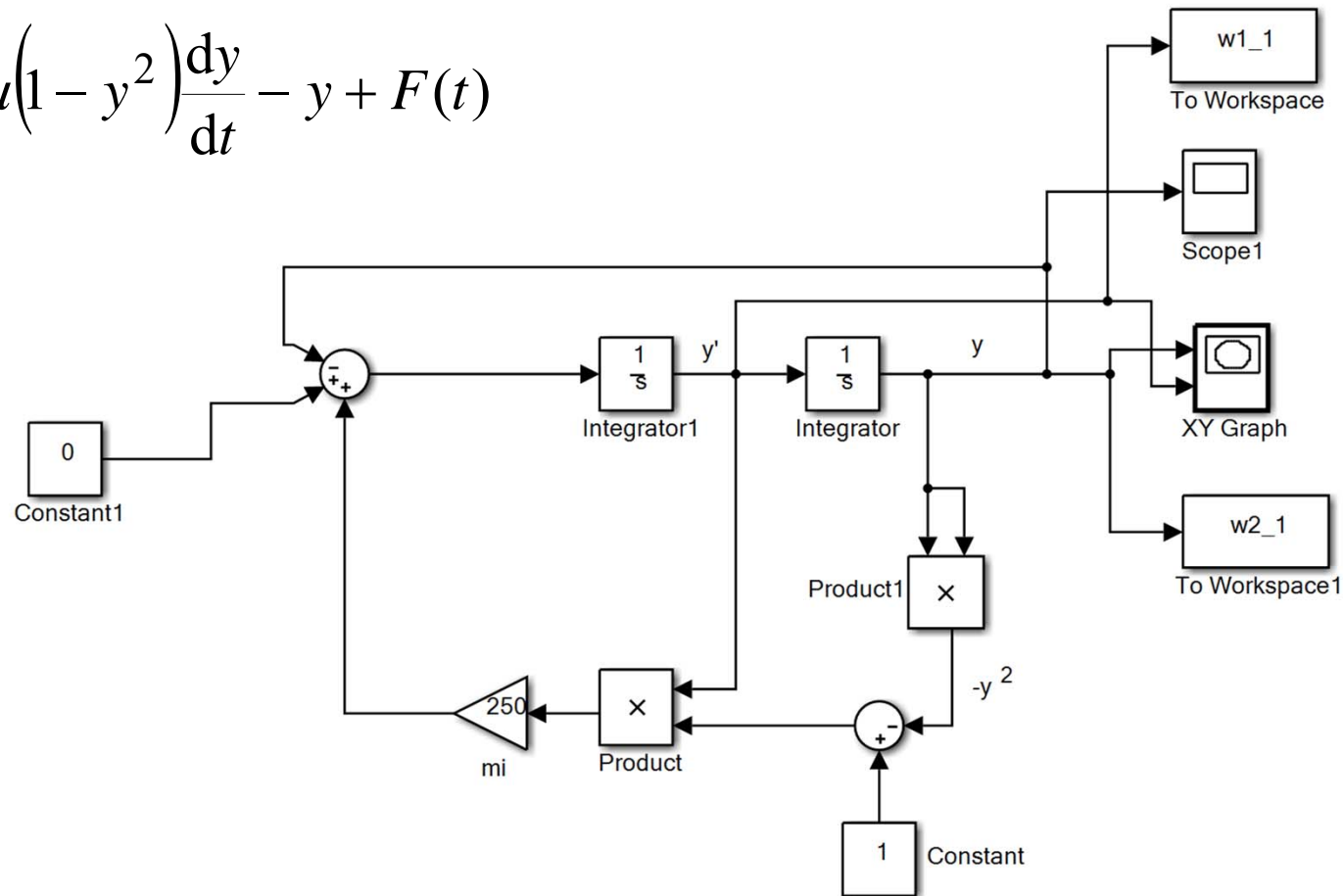
Oryginalny układ **Van der Pola**: oscylacje w układzie elektronicznym ze wzmacniaczem są wynikiem sprzężenia w obwodzie wzmacniacza.



Równanie Van der Pola

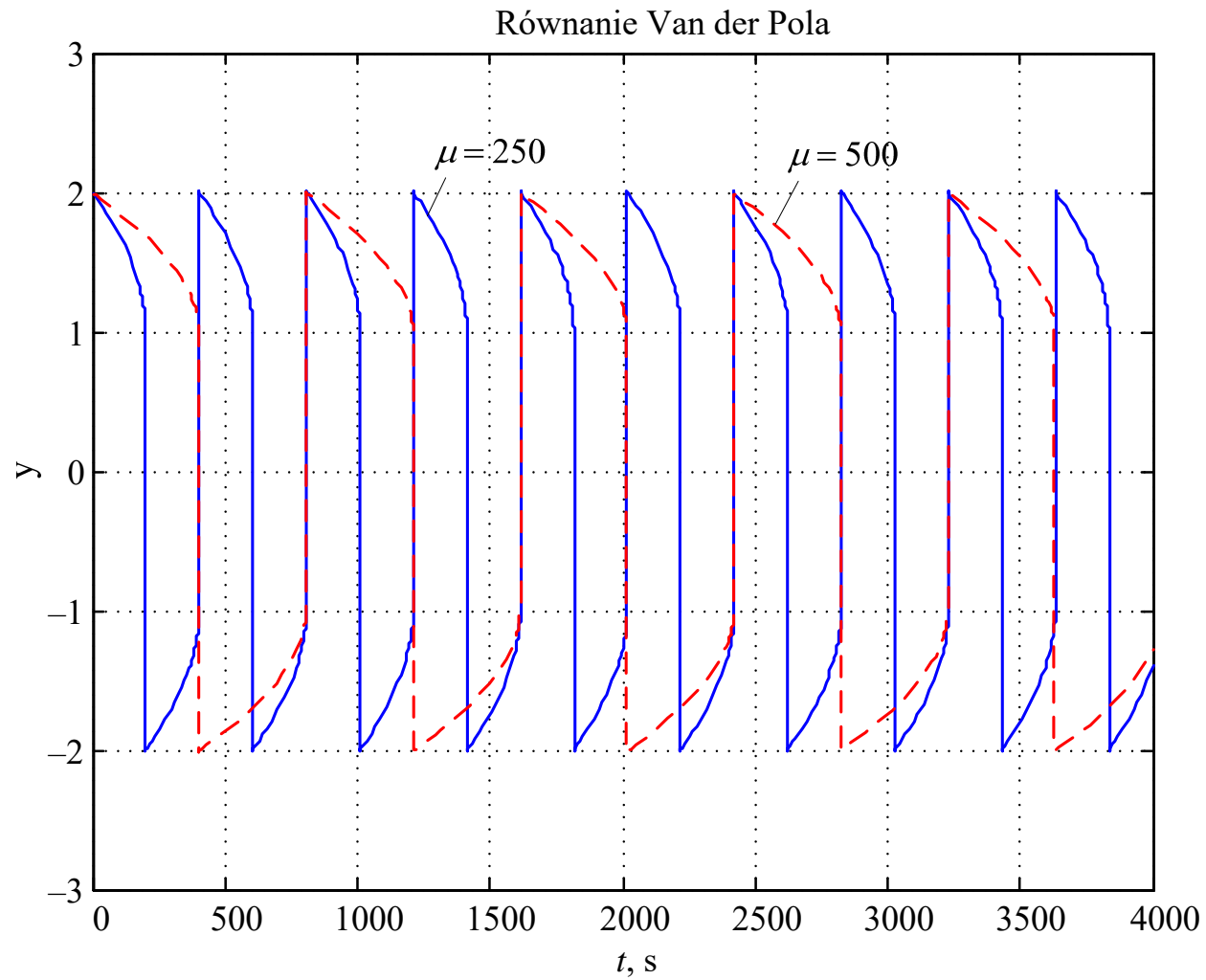
Realizacja modelu w programie SIMULINK:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \mu(1 - y^2) \frac{dy}{dt} - y + F(t)$$



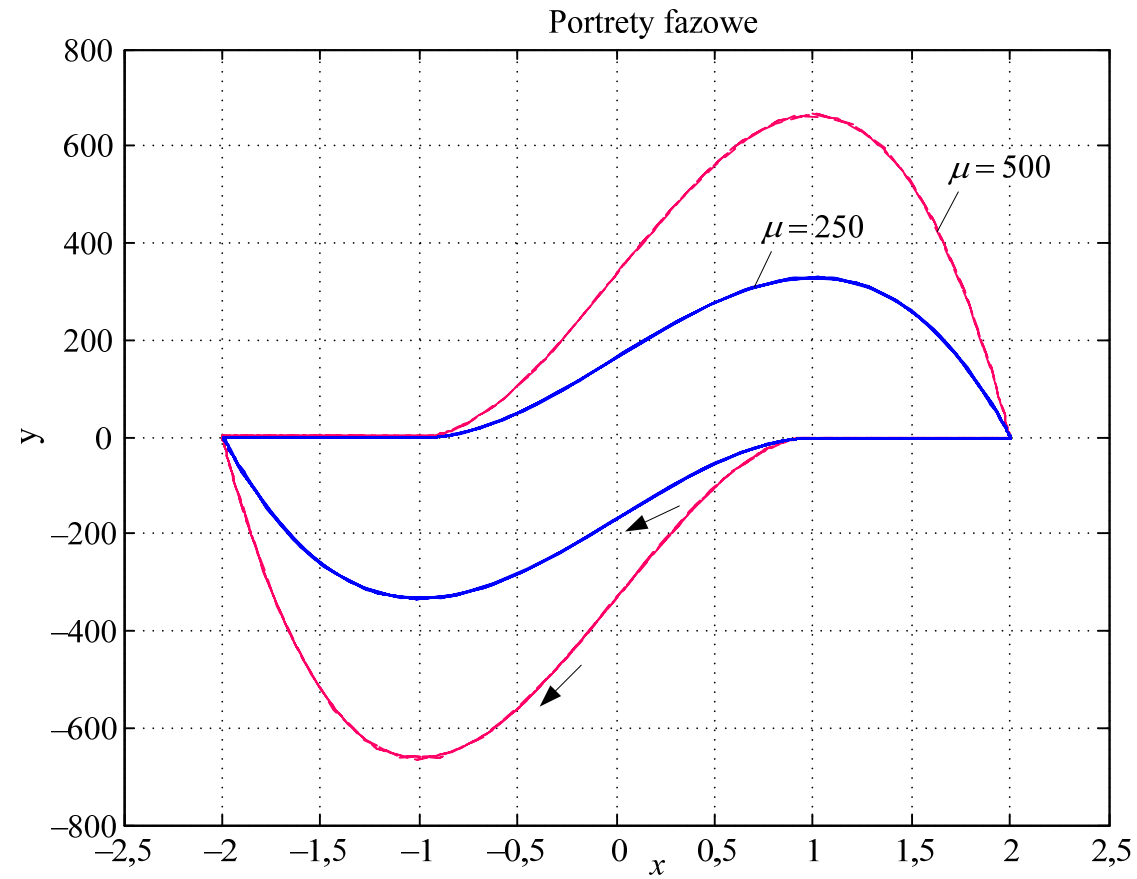
Warunki początkowe: $y'(0)$, $y(0)$ są zadawane w integratorach

Równanie Van der Pola



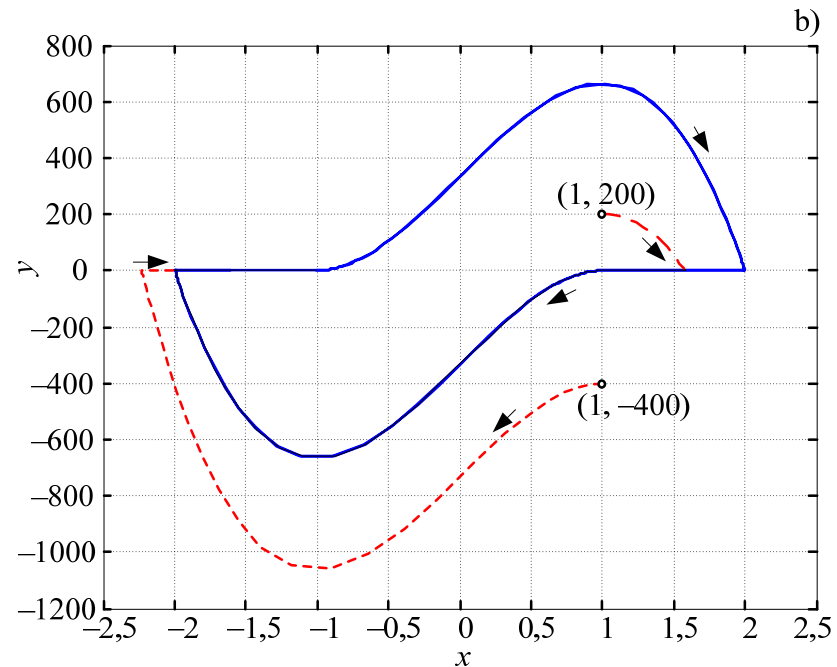
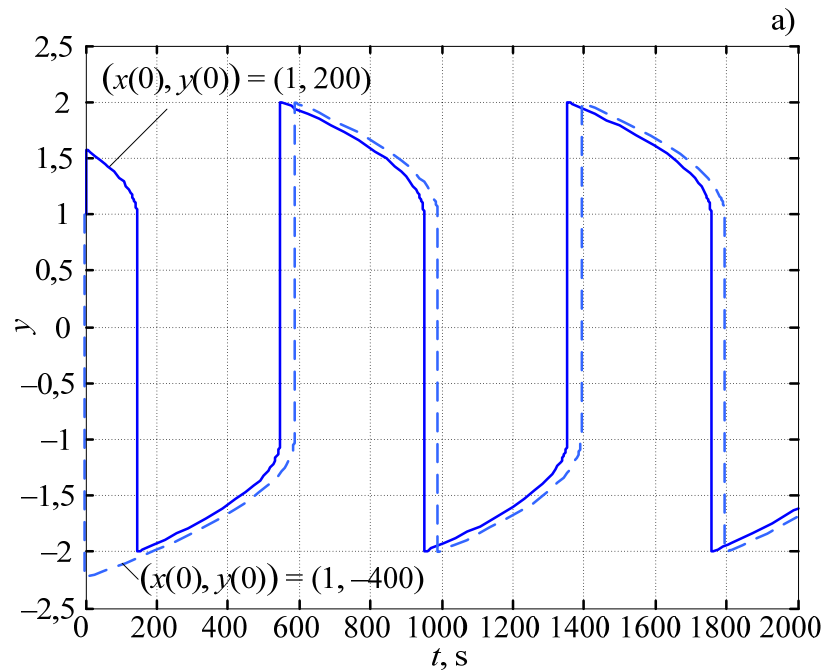
Przykłady rozwiązania w dziedzinie czasu

Równanie Van der Pola



Przykłady trajektorii fazowych

Równanie Van der Pola



Wpływ warunków początkowych na stan przejściowy generatora; $m = 500$

Zastosowania generatora można rozszerzyć przez wprowadzenie zewnętrznego wymuszenia (układ

nieautonomiczny):
$$\frac{d^2 y}{dt^2} - \mu(1 - y^2) \frac{dy}{dt} + y = F \cos \omega t$$

Równanie różniczkowe Duffinga

Równanie Duffinga jest często stosowane do opisu drgań układów mechanicznych sprężystych z tłumieniem (sztywna sprężyna, sprężysta belka), a także nieliniowe układy elektroniczne, które podlegają wymuszeniom oscylacyjnym:

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} \pm \omega_0^2 x + \beta x^3 = F \cos(\omega t + \varphi)$$

gdzie: δ – współczynnik tłumienia;

β – liniowy współczynnik sztywności;

ω_0^2 – współczynnik oscylacji (własnych);

F – amplituda wymuszenia;

ω – pulsacja wymuszenia.

Równanie różniczkowe Duffinga

Zależność powyższa może być przedstawiona w postaci dwóch równań różniczkowych pierwszego rzędu (równania stanu):

$$\begin{aligned}\dot{u} &= v \\ \dot{v} &= \mp \omega_0^2 u - \beta u^3 - \delta v + F \cos(\omega t + \varphi)\end{aligned}$$

gdzie dwie zmienne (zmienne stanu) mają prostą interpretację fizyczną:

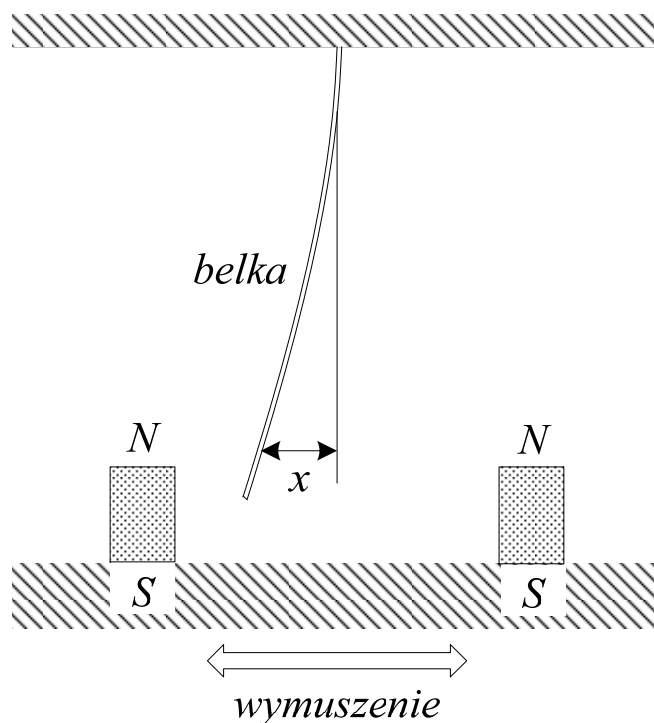
u – przemieszczenie,

v – prędkość.

Równanie Duffinga odwzorowuje drgania sprężystej belki pobudzanej przez elektromagnes.

Równanie różniczkowe Duffinga

Zależność powyższa może być przedstawiona w postaci dwóch równań różniczkowych pierwszego rzędu (równania stanu):



Równanie Duffinga jest bazą do analizy różnych zjawisk fizycznych, w zależności od jego parametrów.

Równanie różniczkowe Duffinga

Dla parametrów: $\beta = 0$, $\varphi = 0$ oraz przy dodatnim znaku przy współczynniku ω_0^2 , przyjmuje następującą formę:

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + \omega_0^2 x = F \cos(\omega t)$$

Jego rozwiązanie daje dwie współrzędne, które w stanie ustalonym formują elipsę:

$$\left(\frac{x(t)}{A} \right)^2 + \left(\frac{v(t)}{\omega A} \right)^2 = 1$$

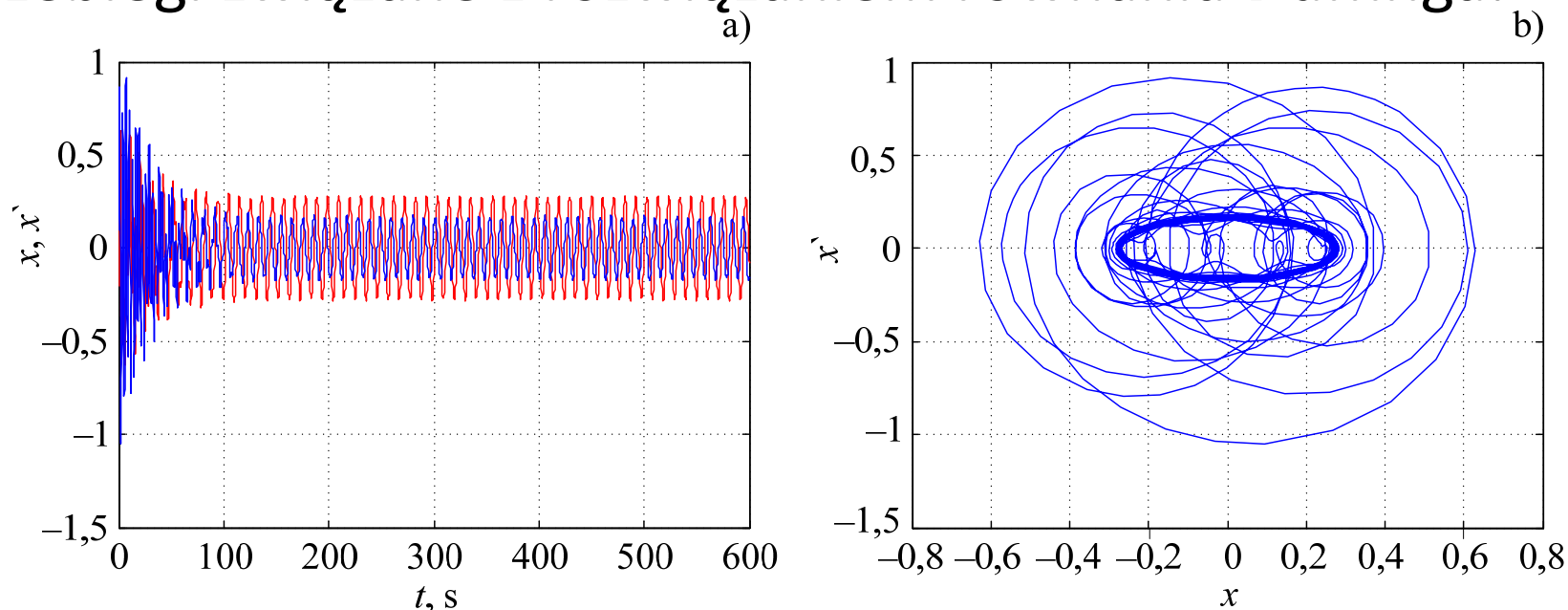
A jest amplitudą, której największa wartość występuje dla warunku:

$$\omega_{rez} = \sqrt{\omega_0^2 - (\delta / 2)^2}$$

gdzie ω_{rez} jest pulsacją nieliniowego rezonansu.

Równanie różniczkowe Duffinga

Przebiegi związane z rozwiązaniem równania Duffinga:



Obecność nieliniowego członu βx^3 całkowicie zmienia właściwości równania, gdyż przedstawia ono układ nieliniowy:

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} \pm \omega_0^2 x + \beta x^3 = F \cos(\omega t + \varphi)$$

Równanie różniczkowe Duffinga

Przyjmując dodatni znak przy składniku $\omega_0^2 x$ uzyskuje się dwa punkty w przestrzeni stanów (x, \dot{x}) o minimalnej energii, co łatwo zauważyć, rozpatrując ustaloną (niezależną od czasu) wartość siły:

$$F_0(x) = -\left(\pm \omega_0^2 x + \beta x^3\right)$$

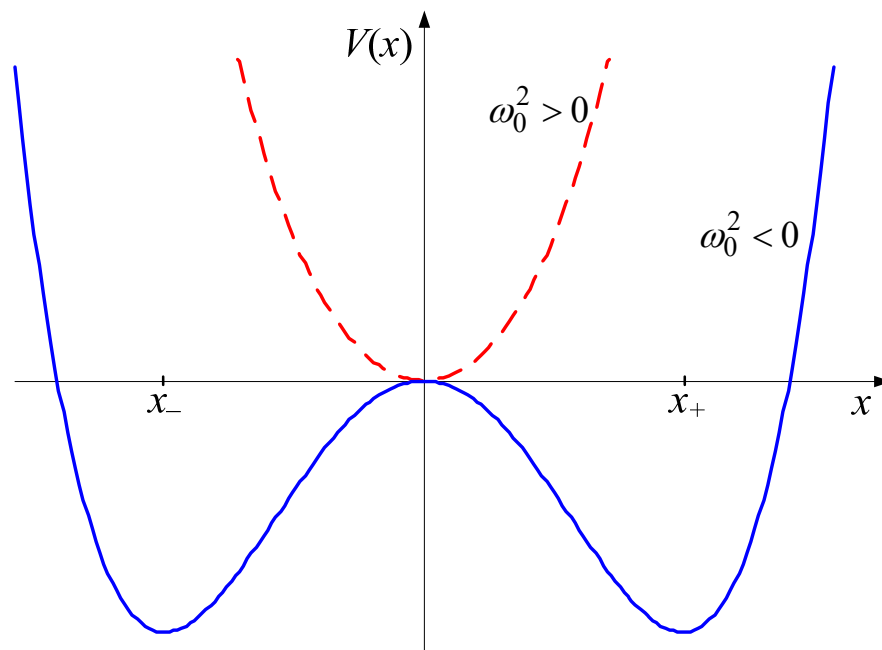
skąd można wyznaczyć energię potencjalną (przy zerowych warunkach początkowych):

$$V(x) = -\int_0^x F_0(x) dx = \pm \frac{\omega_0^2 x^2}{2} + \frac{\beta x^4}{4}$$

Przebiegi energii potencjalnej dla obu wartości znaków stojących przy współczynniku $(\omega_0)^2$ jest pokazany na rysunku:

Równanie różniczkowe Duffinga

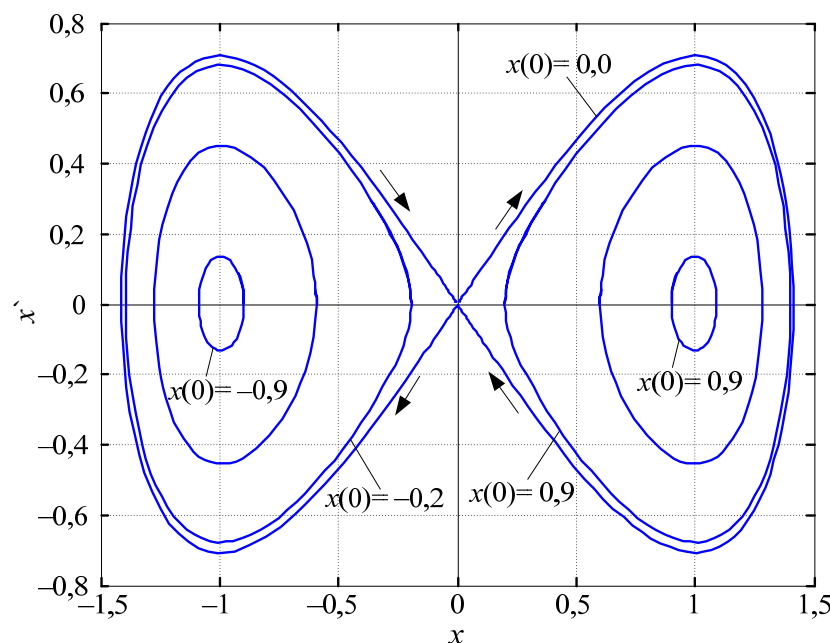
Przebiegi energii potencjalnej w zależności od znaku współczynnika ω_0^2 uzyskuje się



Widać, że dla $(\omega_0)^2 < 0$ występują dwa punkty stabilne oraz punkt niestabilny w początku układu. Zauważmy, że wniosek ten jest zbieżny z kryterium Lapunowa formułowanym w odniesieniu do systemów dynamicznych.

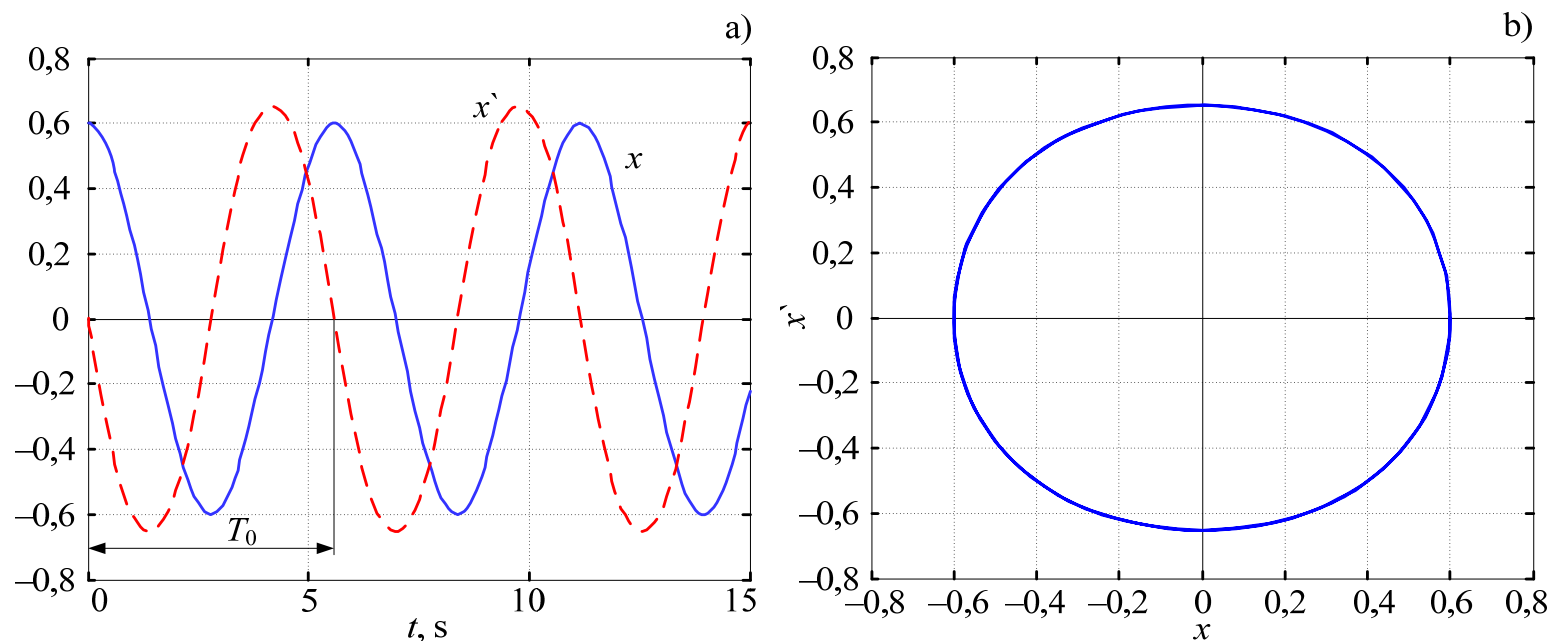
Równanie różniczkowe Duffinga

Trajektorie fazowe tego równania dla różnych warunków początkowych są pokazane na rysunku:



W przypadku przyjęcia dodatniej wartości kwadratu pulsacji własnej: $(\omega_0)^2 = 1,0$, funkcja energii potencjalnej $V(t)$ ma jedno minimum, co zmienia obraz trajektorii fazowej systemu oraz samych przebiegów czasowych.

Równanie różniczkowe Duffinga

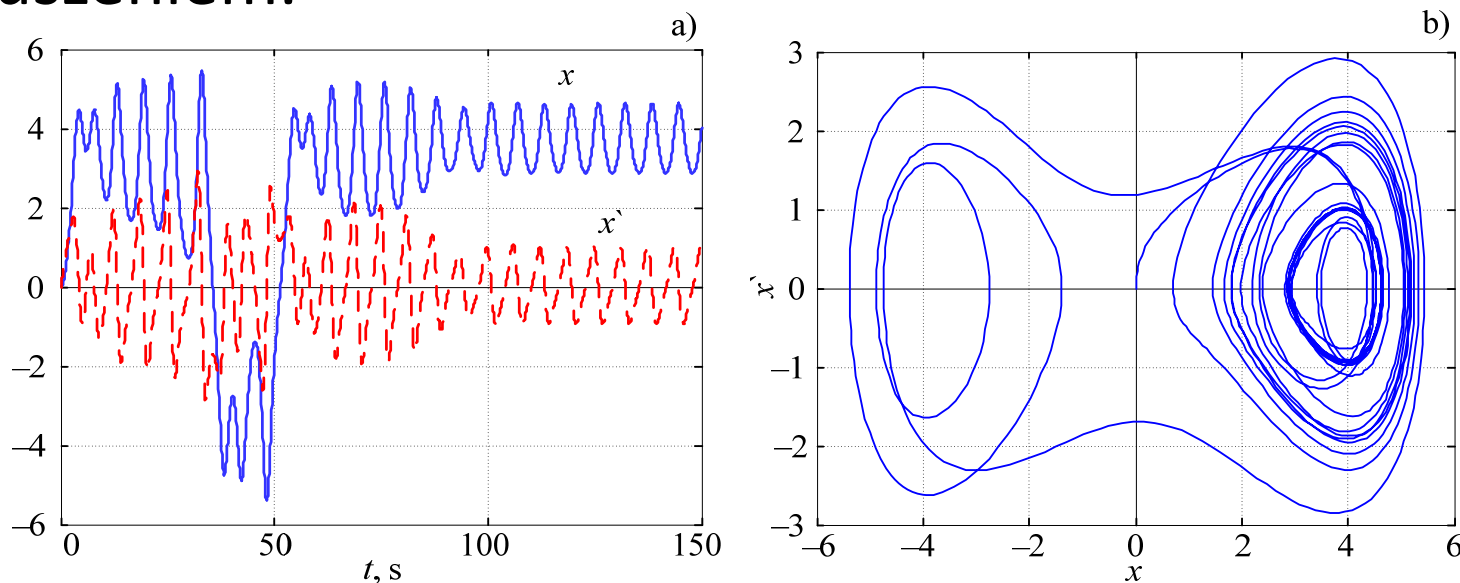


Można zauważyć, że w tym przypadku otrzymuje się bardzo regularne odpowiedzi w dziedzinie czasu oraz na płaszczyźnie fazowej. Parametr ω_0 ma bezpośrednią interpretację fizyczną: jest to pulsacja własna układu, skąd:

$$T_0 = 2\pi/\omega_0.$$

Równanie różniczkowe Duffinga

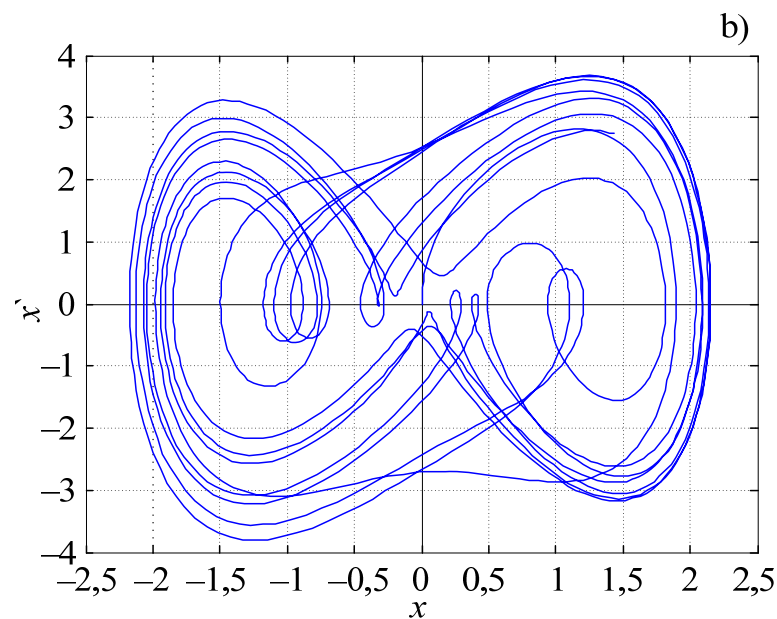
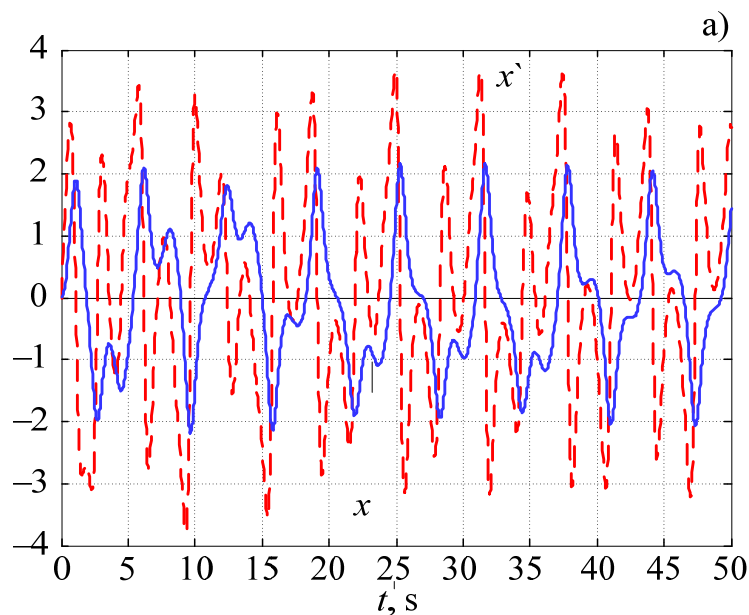
Przy rozważaniu pobudzanego nieliniowego układu Duffinga korzystamy z równania z wymuszeniem. Następny przykład ilustruje zachowanie się rozwiązania dla przypadku $(\omega_0)^2 < 0$ z wymuszeniem.



Odpowiedź czasowa (a) i trajektorie fazowe równania Duffinga (b) dla $(\omega_0)^2 = -1,0$

Równanie różniczkowe Duffinga

Kolejna symulacja została wykonana dla następujących parametrów: $F = 5,5$; $\delta = 0,5$; $\beta = 2,5$; $(\omega_0)^2 = -1,0$; $\omega = 1,0$ przy takich samych, jak powyżej warunkach początkowych.



Uzyskuje się chaotyczne zachowanie się układu: żadna część odpowiedzi się nie powtarza, a portret fazowy zawiera obszary przyciągania (atraktory).

Systemy chaotyczne

Najczęściej przyjmuje się następujące właściwości:

- są tranzytywne (czyli mają tzw. własność rozprzestrzeniania, co oznacza, że trajektorie, czyli ciągi kolejnych obrazów danego punktu, rozpoczynające się w jakimkolwiek zbiorze są „rozsyłane” na cały zbiór);
- mają gęsty zbiór punktów okresowych;
- są wrażliwe na zmianę warunków początkowych.

Tranzytywność – gwarancja, że idąc wzdłuż trajektorii jego punktów, można się dostać dowolnie blisko każdego punktu z całego zbioru.

Systemy chaotyczne

Równania Lorenza:

$$\dot{y}_1(t) = \alpha(y_2(t) - y_1(t))$$

$$\dot{y}_2(t) = \beta y_1(t) - y_2(t) - y_1(t)y_3(t)$$

$$\dot{y}_3(t) = -\gamma y_3(t) + y_1(t)y_2(t)$$

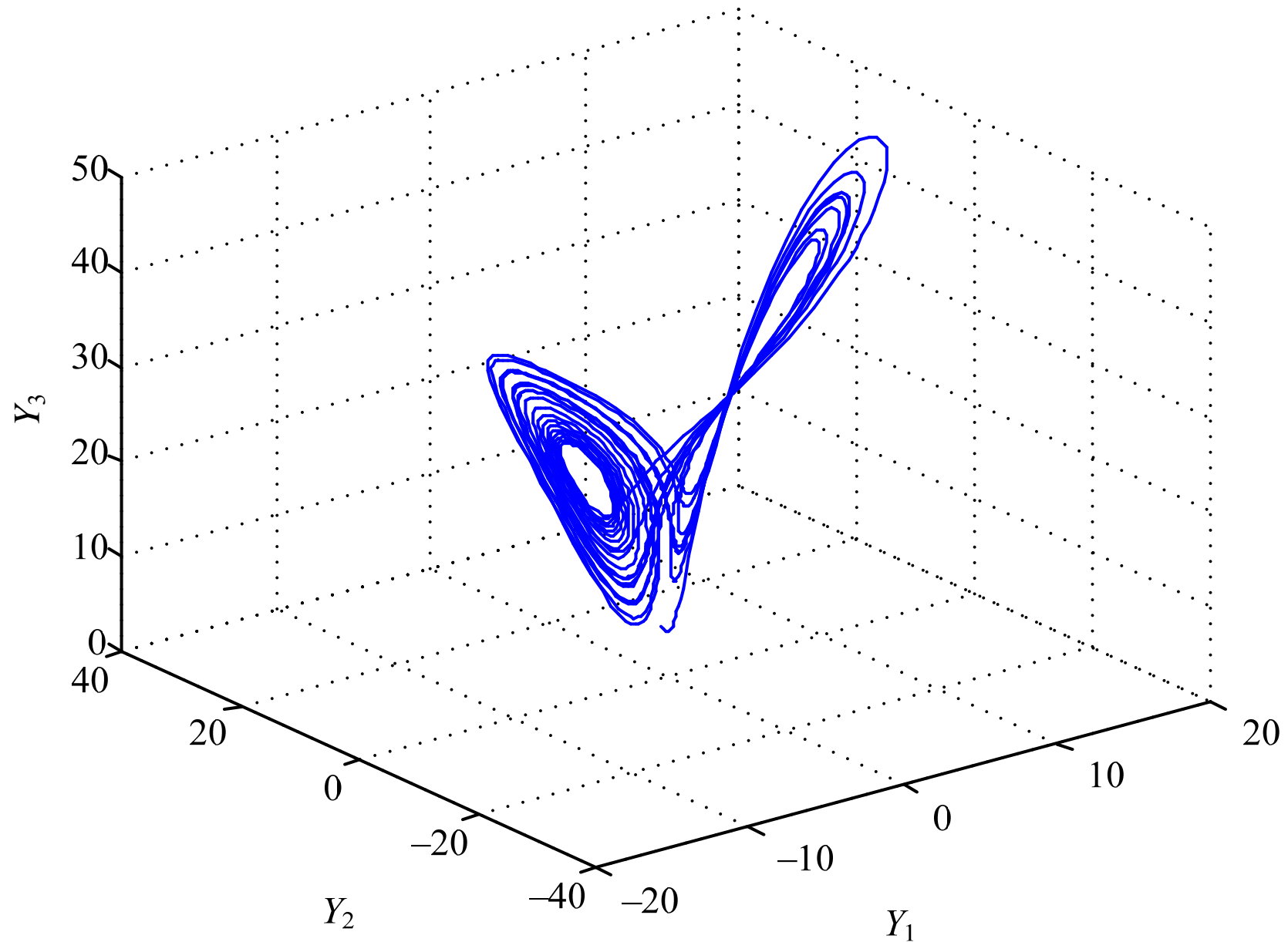
przy następujących parametrach:

$$\alpha = 10, \beta = 28, \gamma = 8/3$$

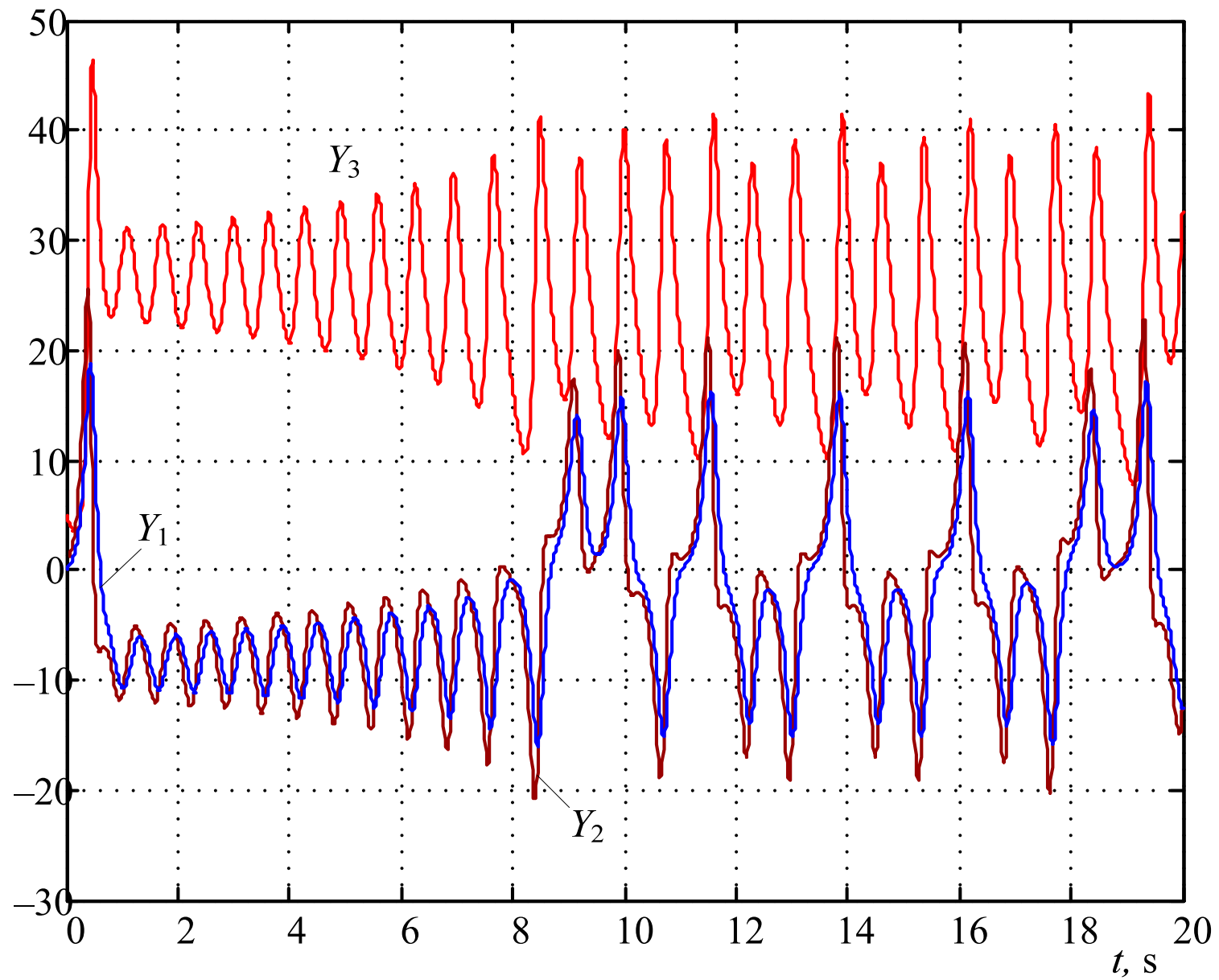
oraz przy warunkach początkowych:

$$y_1(0) = 0, y_2(0) = 1, y_3(0) = 5$$

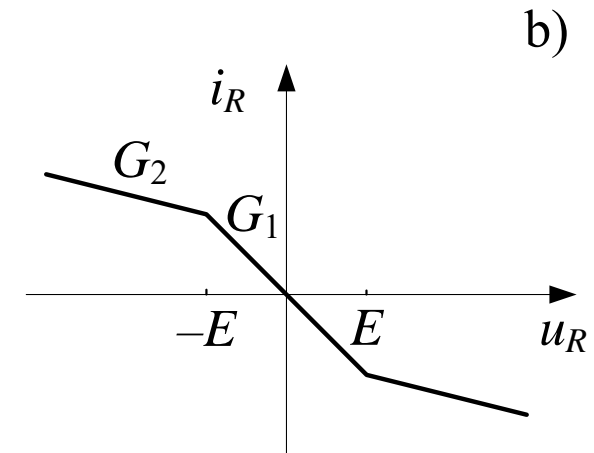
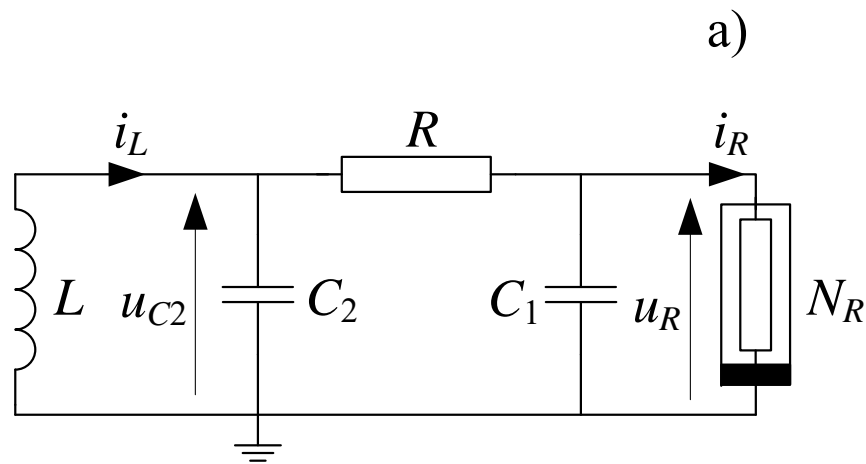
Systemy chaotyczne



Systemy chaotyczne



Obwód Chua



Obwód Chua: schemat zastępczy a) oraz charakterystyka diody Chua b)

Charakterystyka diody Chua:

$$i_R = g(u_R) = \begin{cases} G_1 u_R & \text{dla } |u_R| < E \\ G_2 u_R + (G_2 - G_1)E & \text{dla } u_R \leq -E \\ G_2 u_R - (G_2 - G_1)E & \text{dla } u_R \geq E \end{cases}$$

Obwód Chua

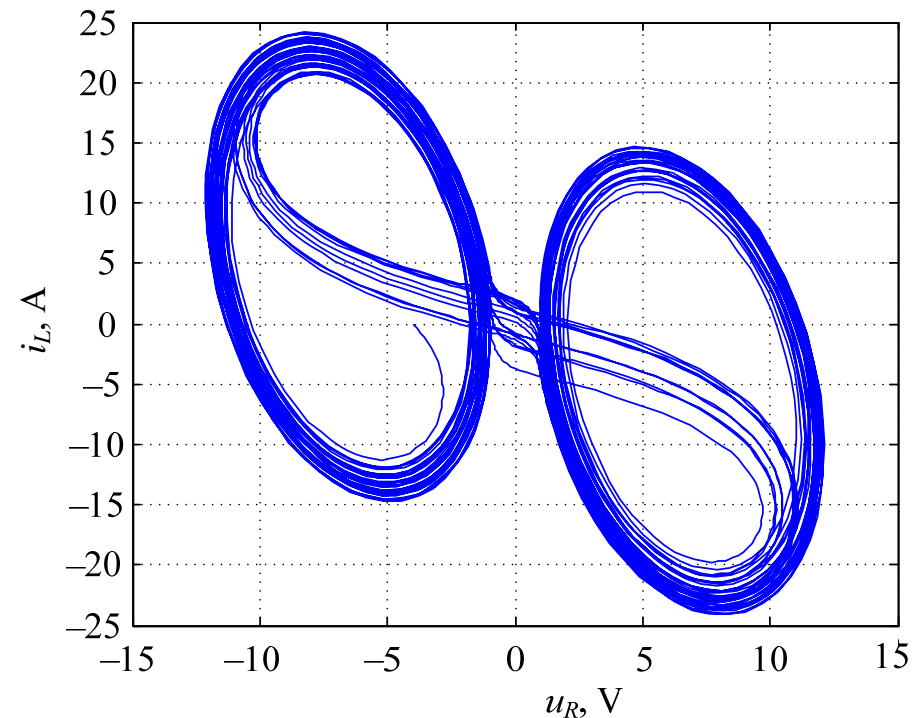
Równania obwodu:

$$\dot{u}_R = \frac{1}{RC_1}(u_{C2} - u_R) - \frac{1}{C_1}g(u_R)$$

$$\dot{u}_{C2} = \frac{1}{C_2}i_L - \frac{1}{RC_2}(u_{C2} - u_R)$$

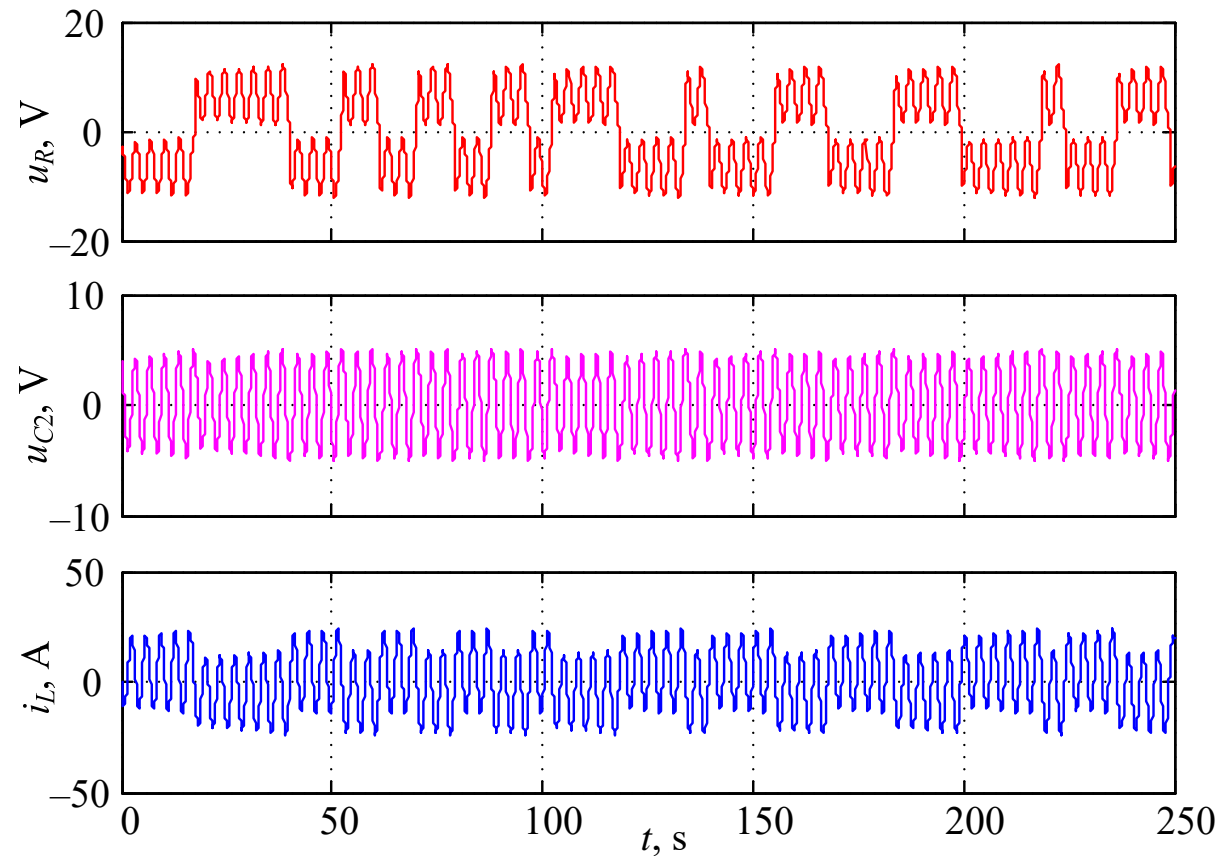
$$\dot{i}_L = -\frac{1}{L}u_{C2}$$

Trajektoria fazowa:



Obwód Chua

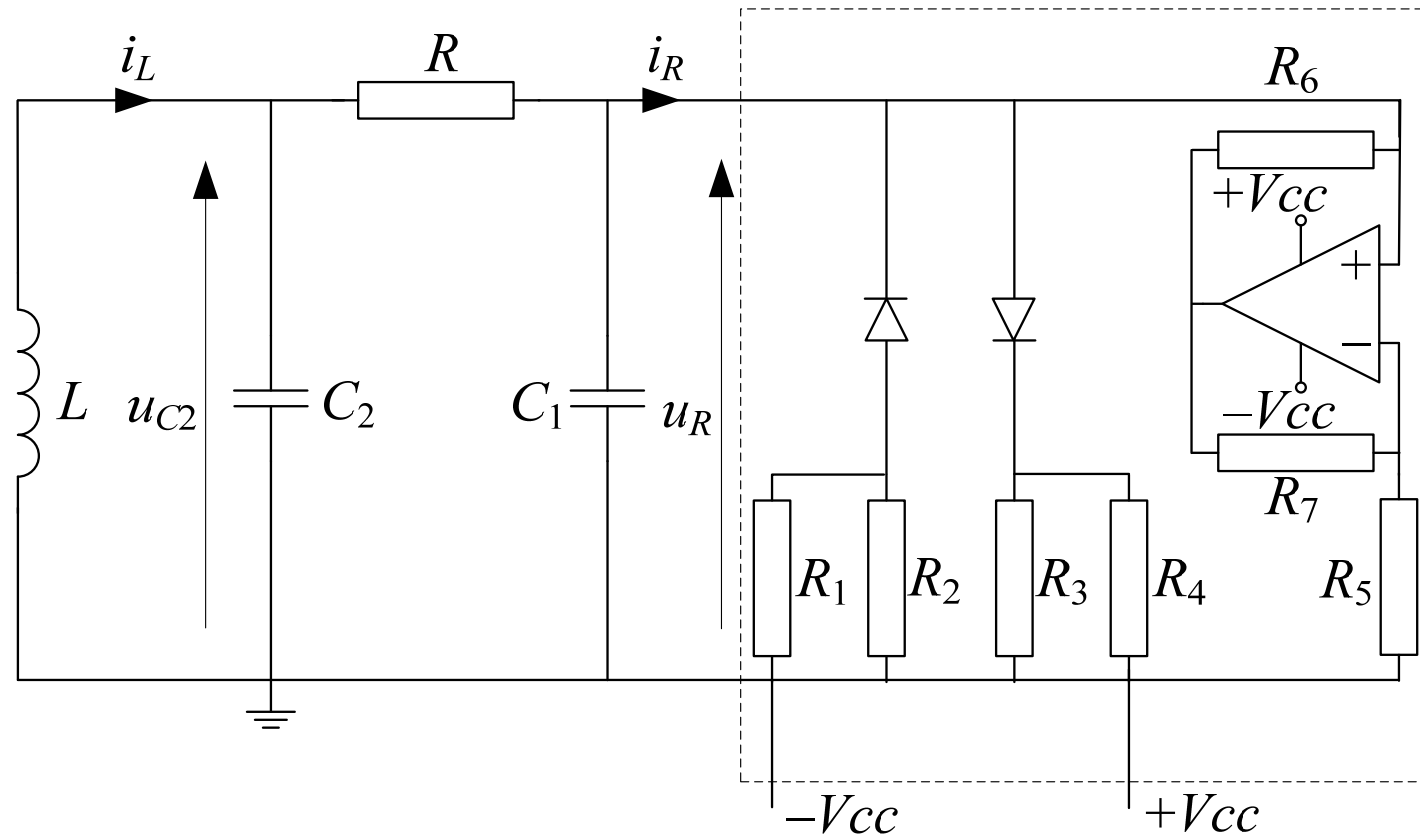
Przebieg zmiennych stanu:



Dioda Chua może być reprezentowana za pomocą różnych obwodów elektronicznych.

Obwód Chua

Jeden z przykładów fizycznej realizacji obwodu Chua:



Znane są przykłady zastosowania w telekomunikacji do szyfrowania przesyłu danych.

Modelowanie nieliniowych układów dyskretnych

Zapis równań dynamiki w postaci dyskretniej prowadzi do dynamicznych systemów dyskretnych. Odpowiednie równania otrzymuje się przez dyskretną aproksymację równań ciągłych:

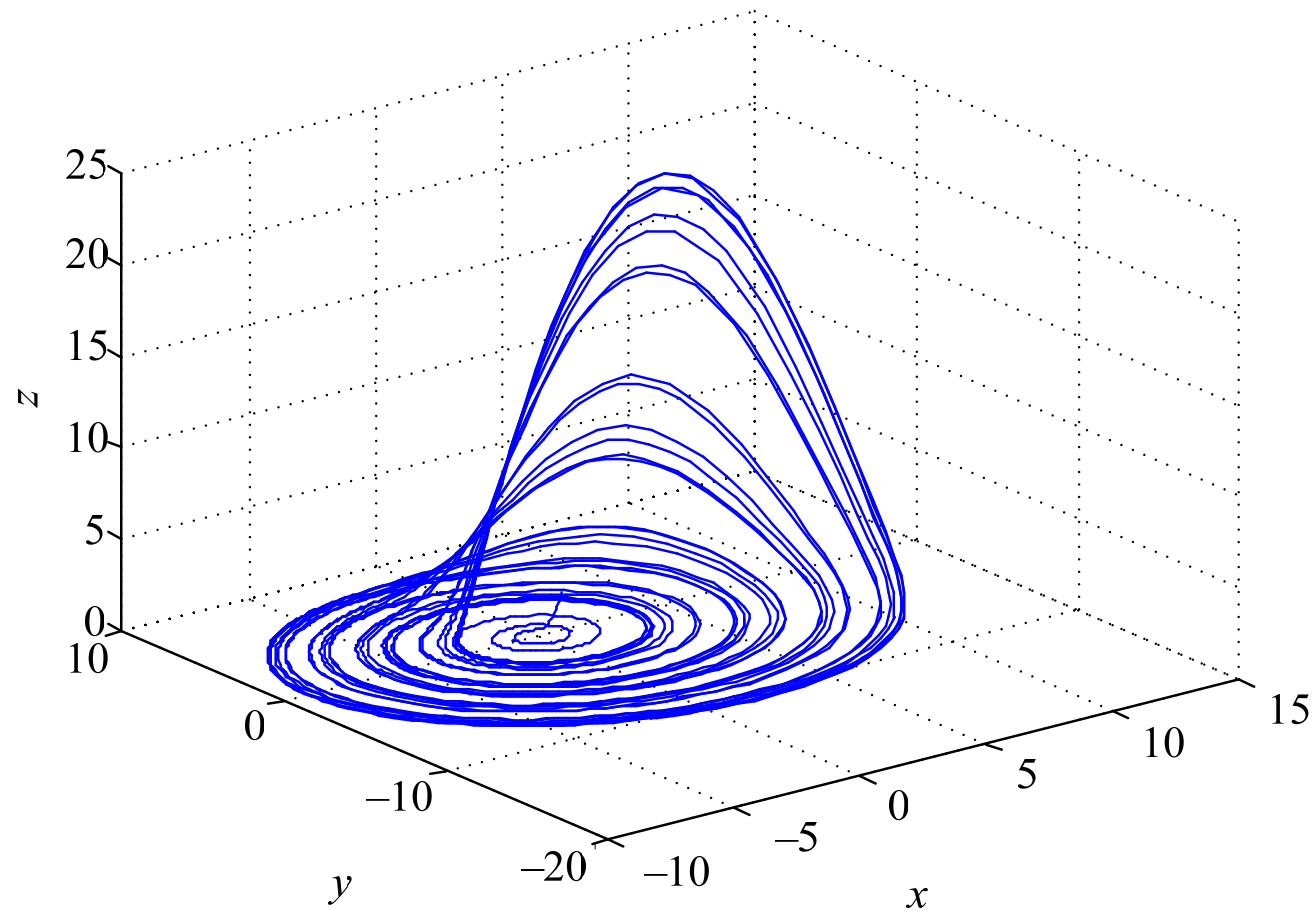
$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \approx \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_k - x_{k-1}}{t - (t-1)} = x_k - x_{k-1}$$

System Rösslera:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z & x_k &= x_{k-1} - h(y_{k-1} + z_{k-1}) \\ \dot{y} &= x + ey & y_k &= y_{k-1} + h(x_k + ey_{k-1}) \\ \dot{z} &= f + xz - mz & z_k &= z_{k-1} + h(f + ex_k z_{k-1} - mz_{k-1}) \end{aligned} \rightarrow$$

Modelowanie nieliniowych układów dyskretnych

Portret fazowy systemu Rösslera:



Modelowanie nieliniowych układów dyskretnych

Ogólna postać układu dyskretnego:

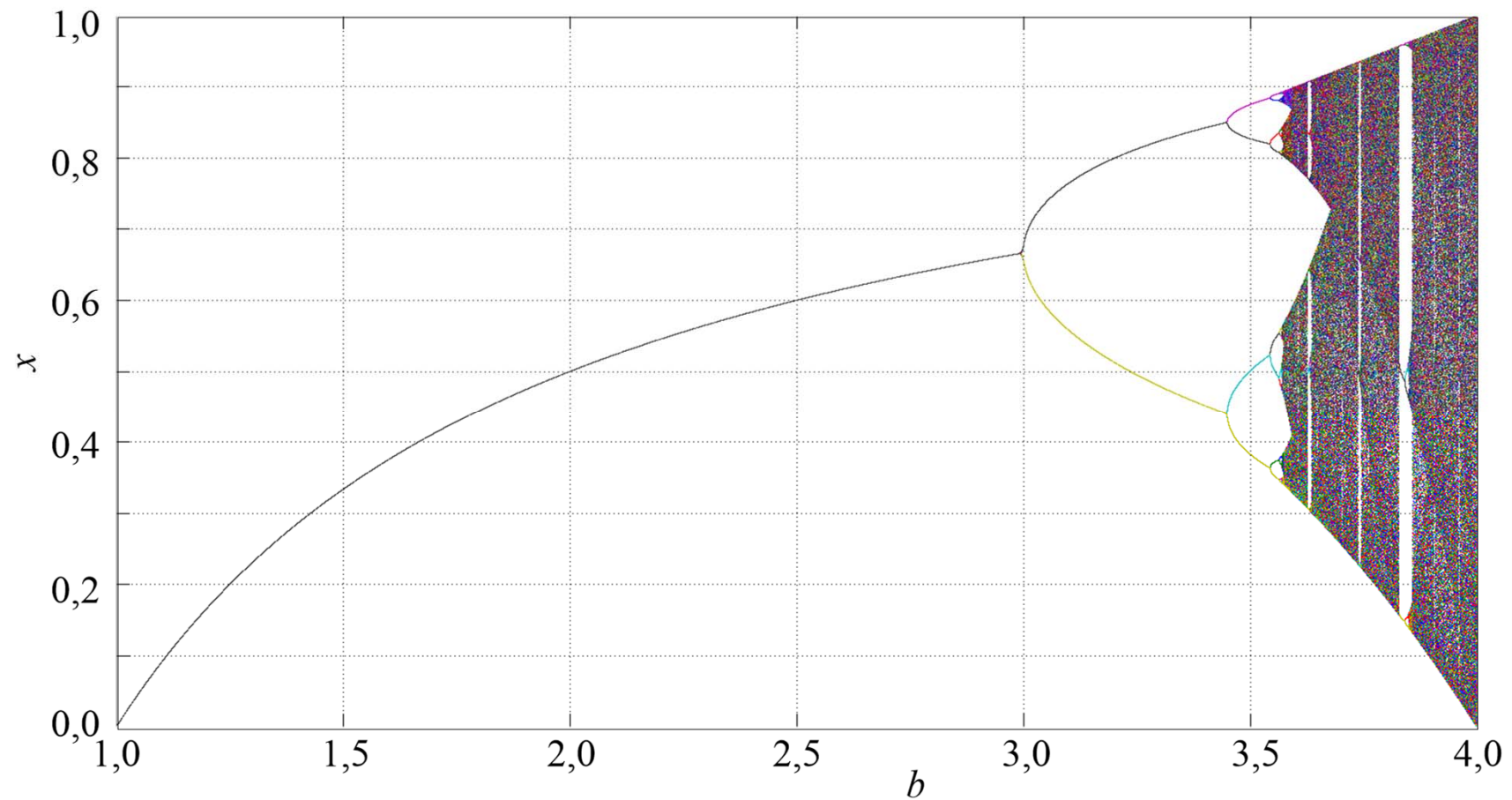
$$x_k = bx_{k-1}(1 - x_{k-1})$$

Jest to tzw. równanie logistyczne. Dyskretne systemy logistyczne charakteryzują się występowaniem punktów **bifurkacji**, które związane są z gwałtownym rozdzieleniem procesu, przy niewielkiej zmianie parametru b .

(bifurcare – rozdawać, rozwidlać).

Modelowanie nieliniowych układów dyskretnych

Przykład procesu bifurkacji:



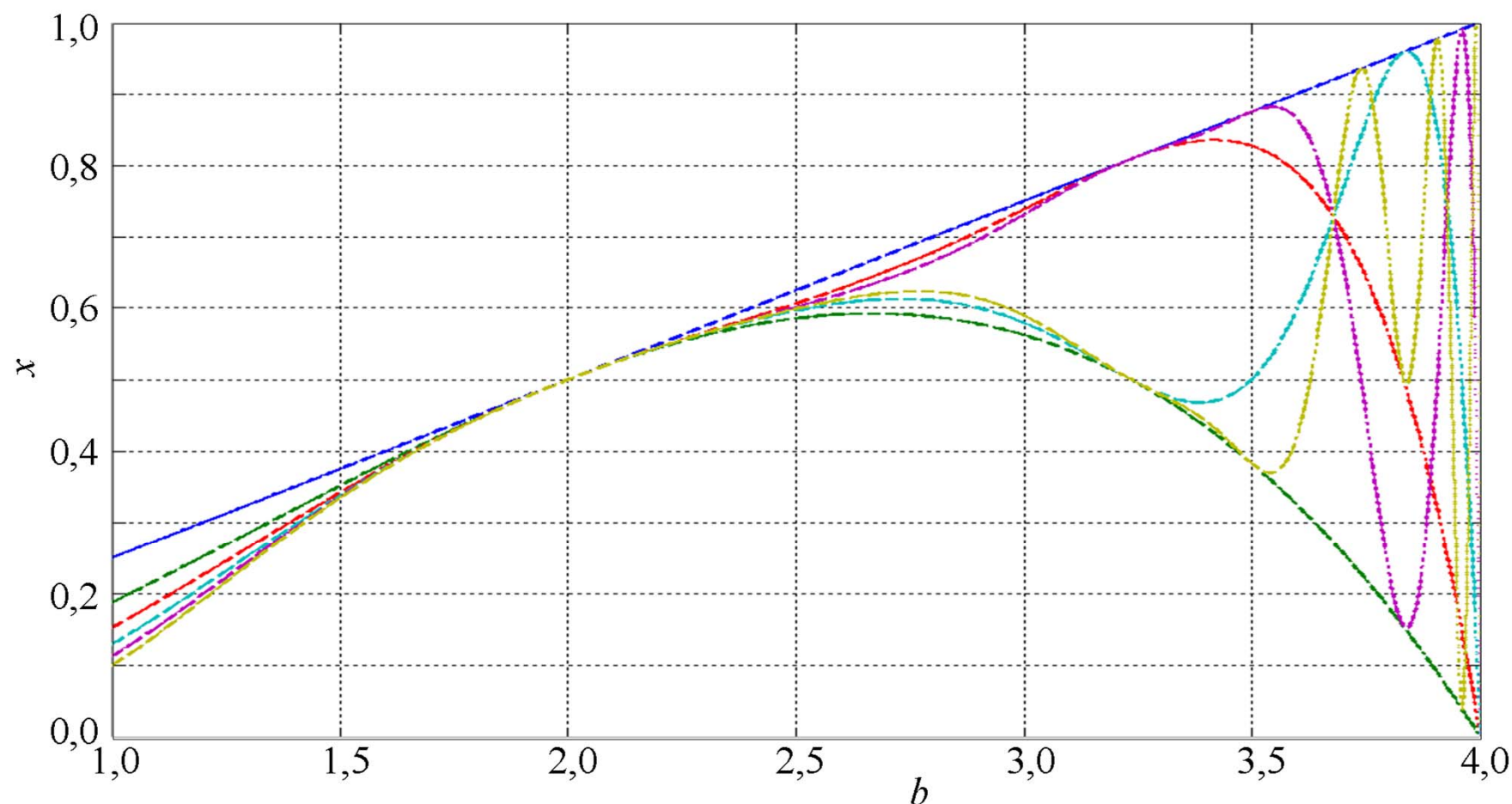
Modelowanie nieliniowych układów dyskretnych

Cechą charakterystyczną zjawiska bifurkacji jest podwojenie częstotliwości przebiegów generowanych zgodnie ze wzorem logistycznym, po osiągnięciu przez parametr b odpowiednich wartości: $b = 3,0, 3,4494897, 3,5440903, \dots$ W rezultacie kolejnych zdwojeń okresu oscylacji, częstotliwość generowanych drgań wzrasta w kolejnym n -tym punkcie bifurkacji do wartości 2^n , $n = 0, 1, 2, \dots$ Towarzyszące tym punktom wartości parametru $b = b_n$ stosują się do prawa Feigenbauma:

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n-1} - b_n}{b_n - b_{n+1}} = 4,6692016091\dots$$

Modelowanie nieliniowych układów dyskretnych

Proces generacji przebiegów bifurkacji z uwzględnieniem stanu przejściowego jest pokazany poniżej.



Identyfikacja systemów chaotycznych

Chaos, ze swej natury, trudno poddaje się ogólnemu opisowi i uporządkowanej klasyfikacji. Podstawowa miara takich zachowań jest tworzona na bazie teorii stabilności Lapunowa, a ich ocenę rozważa się w przestrzeni fazowej opisującej badany system.

Można uznać, że układ jest chaotyczny, jeśli sąsiednie, początkowo bliskie trajektorie, oddalają się od siebie wykładniczo, co prowadzi do następującej zależności:

$$|\Delta x(t)| \approx e^{\lambda t} \Delta x_0$$

gdzie: Δx_0 - początkowa odległość rozważanych trajektorii;
 λ - wykładnik (współczynnik) Lapunowa.

Warunkiem chaotyczności systemu jest dodatnia wartość wykładnika λ .

Identyfikacja systemów chaotycznych

Wartość wykładnika λ zależy od kierunku trajektorii oraz od wybranej wartości początkowej, więc należy mówić o spektrum współczynników Lapunowa dla danego systemu, a jego wymiar jest równy liczbie współrzędnych fazowych (liczba równań systemu w postaci układu równań pierwszego rzędu – równań stanu). Zatem, dla n – wymiarowego autonomicznego systemu, spektrum wykładników Lapunowa jest określone przez zbiór: $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$. Zbiór ten można uporządkować według kolejnych wartości:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$$

Maksymalna liczbowa wartość współczynnika z tego spektrum: $\lambda_1 = \lambda_{Max}$ charakteryzuje maksymalną szybkość separacji trajektorii systemu.

Identyfikacja systemów chaotycznych

Wartość współczynnika λ_{Max} jest zazwyczaj przyjmowana, jako miara chaotyczności systemu.

Ważną miarą chaotyczności systemu jest także liczba wykładników Lapunowa, które mają wartości dodatnie. Jeśli warunek ten jest spełniony dla więcej niż jednego wykładnika w spektrum, to mówimy o systemie hiperchaotycznym (**hiperchaos deterministyczny**). Przypadek taki może wystąpić w systemie o liczbie wymiarów $n \geq 4$.

Obliczanie wykładników Lapunowa wymaga zaangażowania zaawansowanych metod numerycznych (patrz skrypt i przykłady numeryczne). Metoda obliczeniowa wywodzi się z następujących założeń.

Identyfikacja systemów chaotycznych

Rozważmy pojedynczą trajektorię systemu, związaną z funkcją $f(x(t))$, na której wybieramy dwa punkty, odległe o wartość Δx_0 , przy czym w procedurze numerycznej ciągły czas w zastępujemy numerem m kolejnej ewolucji (iteracji) wzdłuż rozważanej trajektorii:

$$\Delta x_m = \left| f^m(x_0 + \Delta x_0) - f^m(x_0) \right|$$

Wykładnik odpowiadający współczynnikowi Lapunowa może być obliczony zgodnie z relacją:

$$\lambda_m \approx \ln \frac{\Delta x_m}{\Delta x_0} \approx \ln \left| \frac{f^m(x_0 + \Delta x_0) - f^m(x_0)}{\Delta x_0} \right|$$

Wartość m jest granicą powyższego wyrażenia:

Identyfikacja systemów chaotycznych

$$\lambda = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \ln |f'(x_j)|$$

Kolejne wartości logarytmów są uśredniane z m -tej iteracji.

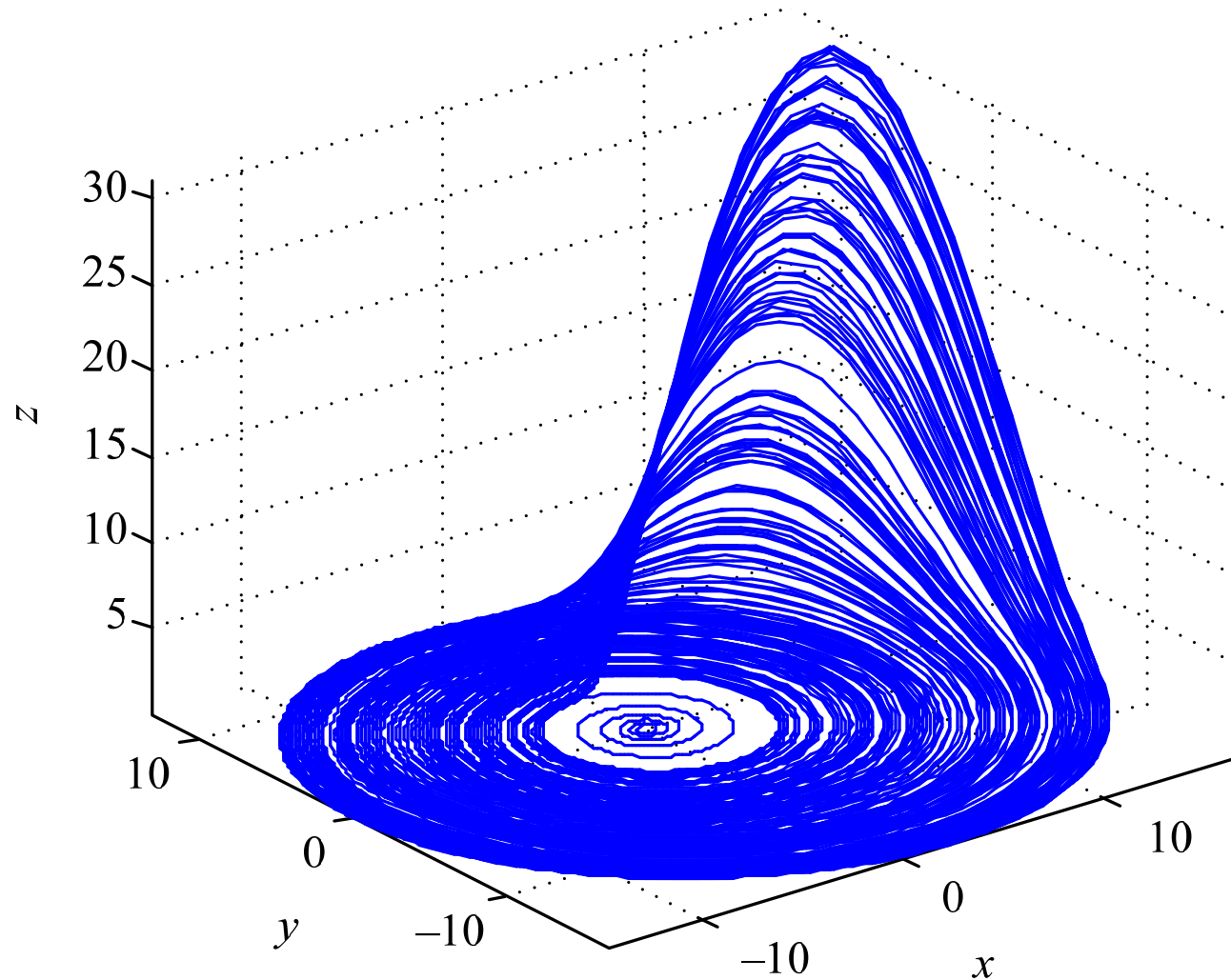
Przykład: Wyznaczyć wykładniki Lapunowa dla ciągłych równań Rösslera:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + ay \\ \dot{z} &= b + xz - cz\end{aligned}$$

przy następujących parametrach: $a = 0,15$; $b = 0,20$;
 $c = 10,0$.

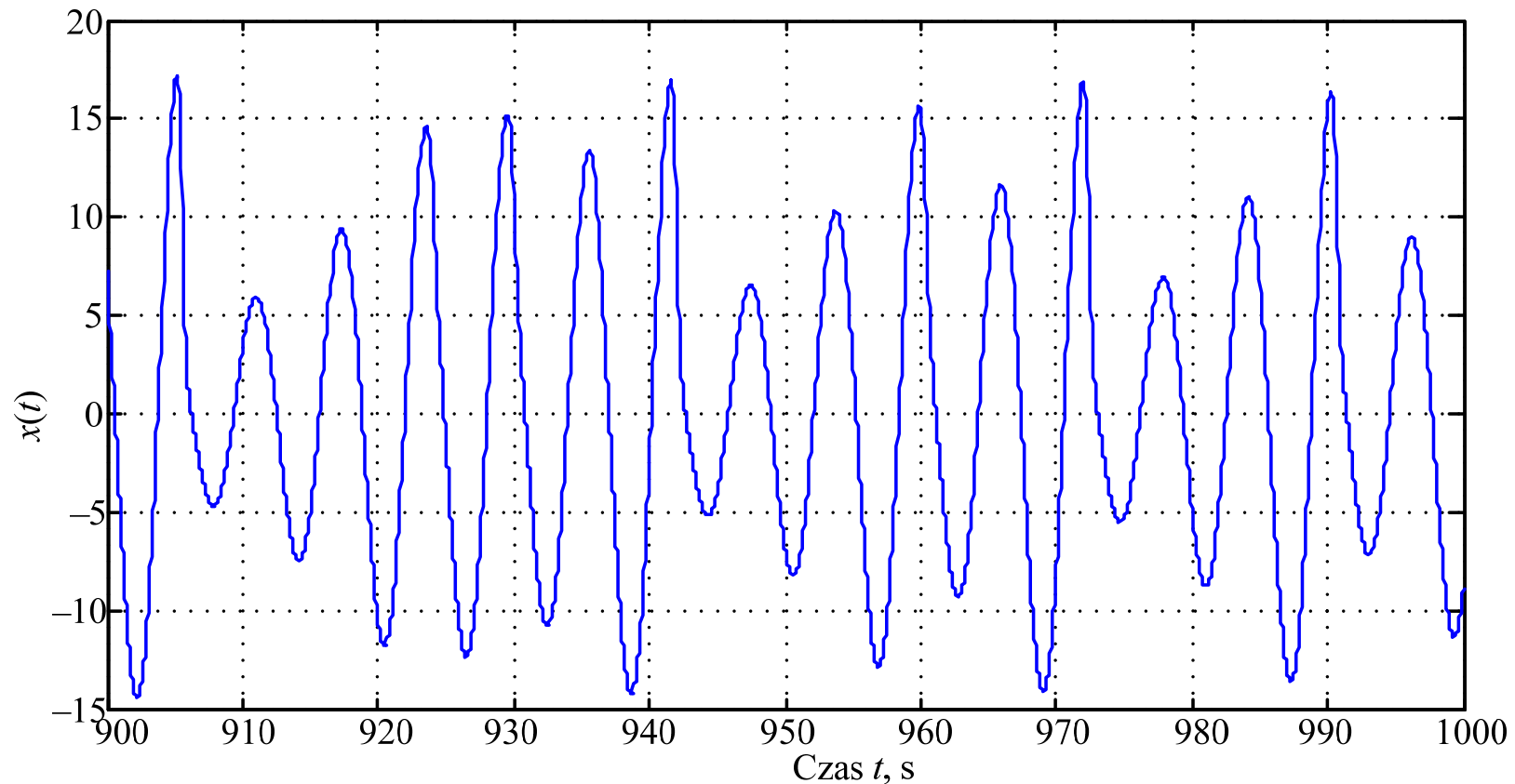
Identyfikacja systemów chaotycznych

Przebieg trajektorii $z = g(x,y)$:



Identyfikacja systemów chaotycznych

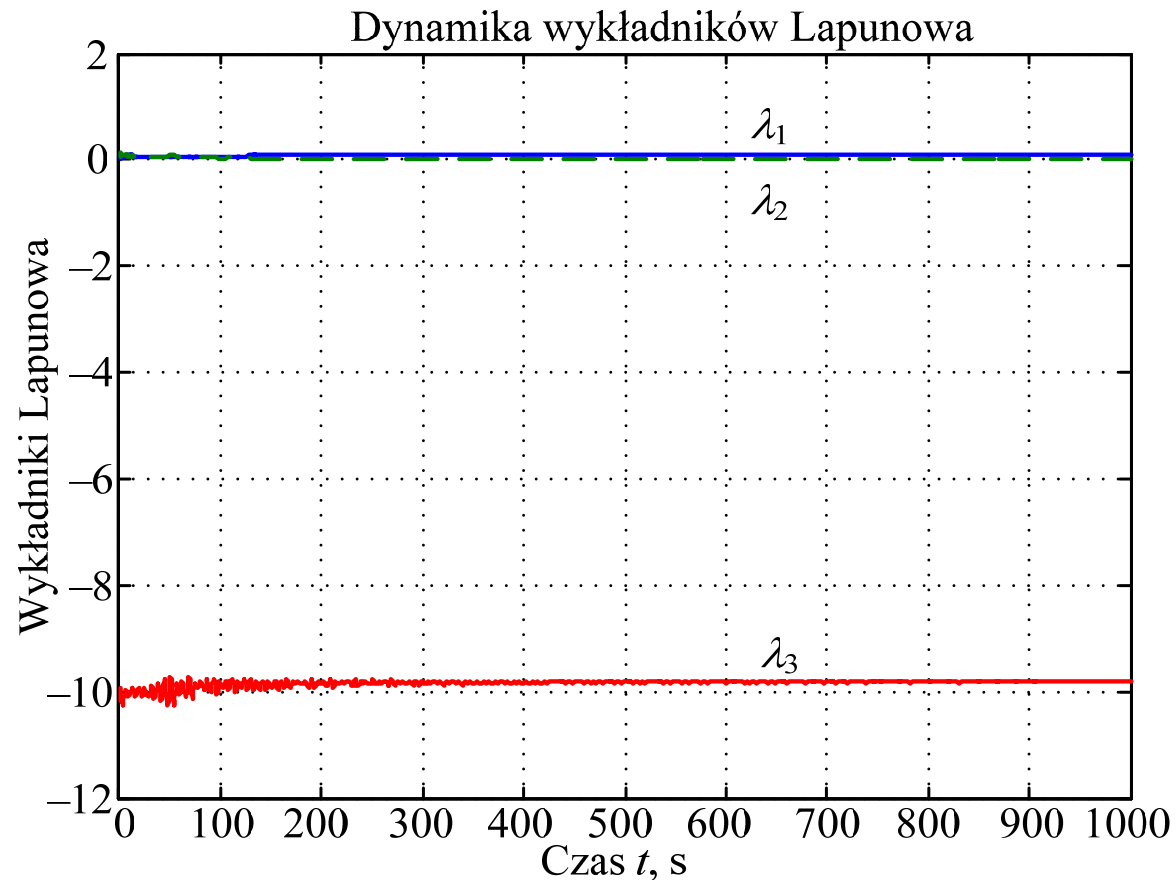
Przebieg zmiennej $x(t)$:



Zauważmy, że w poszczególnych okresach czasu oscylacje się nie powtarzają.

Identyfikacja systemów chaotycznych

Przebiegi wykładników Lapunowa dla badanego systemu Rösslera:



Na końcu rozpatrywanego przedziału, współczynniki te przyjmują następujące wartości: $\lambda_1 = 0,09$; $\lambda_2 = 0,0$; $\lambda_3 = -9.81$.

