

Zadanie 1 - Metoda Lapunowa 2 badania stabilności.

Zbadać stabilność w otoczeniu punktów równowagi układu opisanego podanymi równaniami. Wyznaczyć obszary stabilności asymptotycznej w otoczeniu tych punktów równowagi.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x^2 - y \\ \frac{dy}{dt} &= x - y\end{aligned}\tag{1}$$

- Badanie punktów równowagi.

Punkty równowagi wyznaczamy przez przyrównanie prawej strony równań systemu do zera:

$$x^2 - y = 0$$

$$x - y = 0$$

skąd: $x = y$ oraz:

$$x^2 - x = 0,$$

$$x(x - 1) = 0.$$

Zatem: $x_1 = y_1 = 0$ oraz: $x_2 = y_2 = 1$.

Otrzymujemy więc dwa punkty równowagi o współrzędnych: $(x_1, y_1) = (0, 0)$ oraz $(x_2, y_2) = (1, 1)$.

Równania systemu (1) można także zapisać w formie równań stanu:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

gdzie:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

- Linearizacja funkcji opisującej system

W tym przypadku funkcja opisująca system (prawa strona równania systemu) jest określona przez wielomian drugiego stopnia, więc linearizację można przeprowadzić przez pominięcie składników związanych ze zmiennymi w drugiej i (ewentualnie) wyższych potęgach, na podstawie której można określić stabilność układu w tych punktach.

Dla punktu $(x_1, y_1) = (0, 0)$ otrzymamy następującą macierz stanu układu zlinearyzowanego:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Określamy wartości własne macierzy stanu w celu wyznaczenia równania charakterystycznego dla rozpatrywanego punktu:

$$\det[\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}] = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda(1 + \lambda) + 1 = 0$$

Stąd: $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$, oraz pierwiastki tego równania, które są wartościami własnymi macierzy \mathbf{A} :

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm j \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Części rzeczywiste obu pierwiastków są ujemne, a więc układ w tym punkcie jest stabilny.

Dla drugiego punktu o współrzędnych $x_2 = y_2 = 1$ przekształcamy równanie układu tak, aby ten punkt znalazł się w początku układu współrzędnych. Wprowadzamy nowe współrzędne:

$$z_1 = x_1 - 1; \quad z_2 = x_2 - 1,$$

tak, że $(z_1, z_2) = (0, 0)$ jest początkiem układu współrzędnych, w którym znajduje się rozpatrywany punkt równowagi.

Po podstawieniu tych współrzędnych do równania systemu otrzymamy:

$$\frac{dz_1}{dt} = (x^2 - y)_{x=x_1=z_1+1, y=x_2=z_2+1} = z_1^2 + 2z_1 - z_2$$

$$\frac{dz_2}{dt} = (x - y)_{x=x_1=z_1+1, y=x_2=z_2+1} = z_1 - z_2$$

W procedurze linearizacji pomijane są składniki z potęgami wyższymi od pierwszej, co prowadzi do następującego równania zlinearyzowanego systemu:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

Wartości własne tego systemu określamy wg znanej procedury:

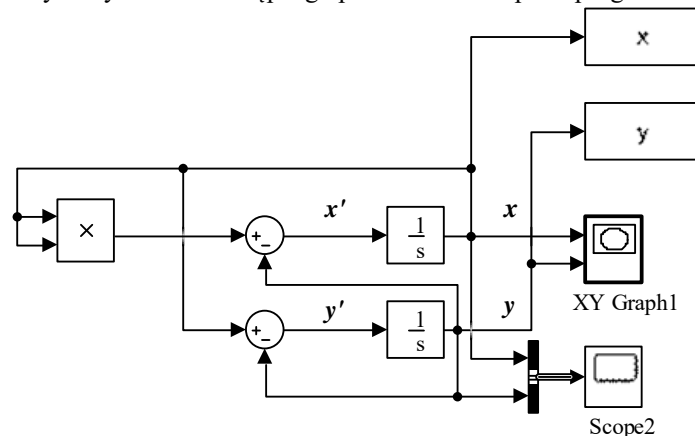
$$\det[\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}] = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = -(2 - \lambda)(1 + \lambda) + 1 = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0,$$

$$\text{skąd otrzymujemy: } \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Jeden z powyższych pierwiastków (wartości własnych macierzy stanu) jest dodatni (część rzeczywista), co oznacza, że ten punkt równowagi jest niestabilny.

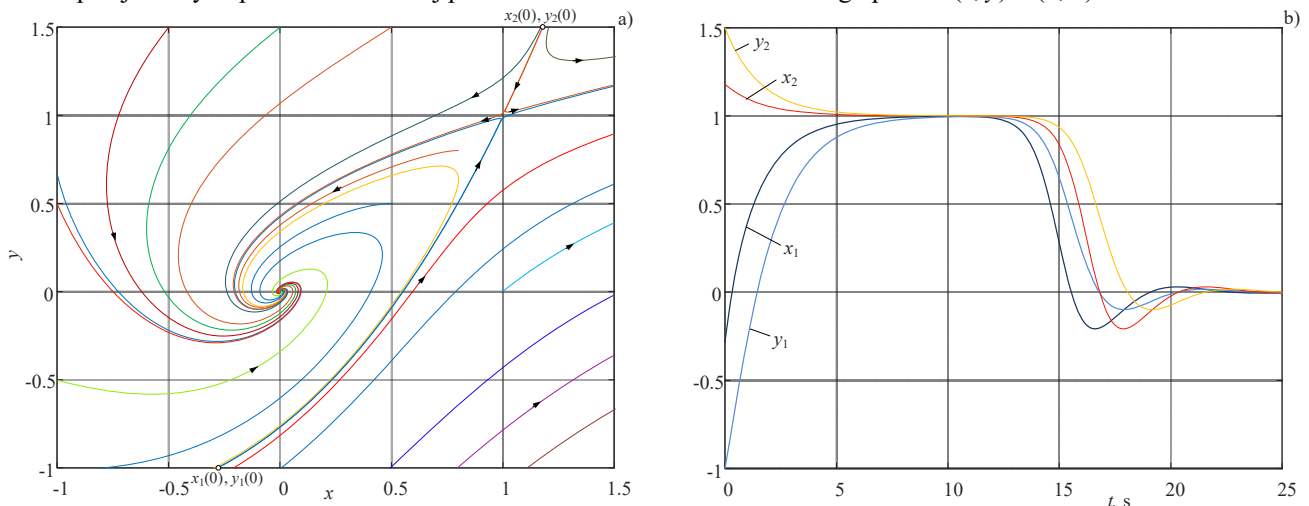
- Badanie obrazu fazowego układu.

Model analizowanego układu (Simulink) jest pokazany na Rys. 1. Odpowiadający mu zbiór dyskowy jest zapisany w pliku Przykl_11_d1.slx. Wartości początkowe można zadawać w blokach integratorów, natomiast bloki oznaczone 'x' oraz 'y' służą do przekazywania odpowiednich zmiennych (wyników symulacji) do przestrzeni roboczej programu Matlab (Workspace), gdzie mogą być wykorzystane do następnego przetwarzania – patrz program w pliku Przykl_11_7_2.m.



Rys. 1. Model Simulink badanego układu

Uzyskane trajektorie fazowe dla różnych wartości początkowych oraz wybrane przebiegi czasowe są pokazane na Rys. 2. Na portrecie fazowym (Rys. 2a) widać wyraźną granicę rozdzielającą obszar stabilny i niestabilny uzyskanych trajektorii. Przebiegi czasowe (Rys. 2b) odpowiadają warunkom początkowym, które są zaznaczone na krawędziach portretu fazowego z Rys. 2a). Punkty początkowe leżą bardzo blisko granicy strefy stabilnej układu, co w tym przypadku oznacza, że także stan przejściowy odpowiedzi czasowej przechodzi bardzo blisko niestabilnego punktu $(x, y) = (1, 1)$ dla czasu $t \approx 11$ s.



Rys. 2. Portret fazowy (a) oraz przebiegi czasowe uzyskane z symulacji badanego układu (b)

- Wyznaczenie obszaru stabilności asymptotycznej w otoczeniu stabilnego punktu o współrzędnych $(x_1, y_1) = (0, 0)$. Zbadajmy jeden z przypadków wyboru funkcji Lapunowa w celu wyznaczenia obszaru stabilności badanego układu w otoczeniu stabilnego punktu.

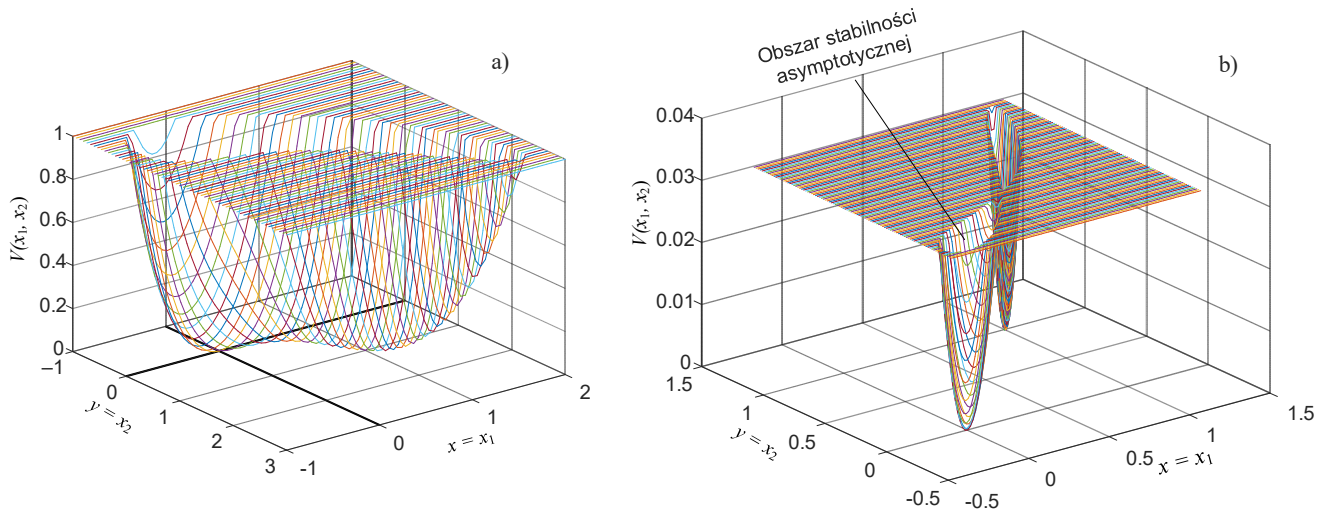
Punkt ten odnosi się do równania (1) zapisanego w formie przyjętych dwóch współrzędnych:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1^2 - x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 \end{aligned} \quad (2)$$

a) Jednym z prostych sposobów określania funkcji Lapunowa jest przyjęcie następującej formuły:

$$V(x, y) = V(x_1, x_2) = (\dot{x}_1)^2 + (\dot{x}_2)^2 = (x_1^2 - x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 \quad (3)$$

Można sprawdzić, że funkcja (3) w dużej mierze spełnia wymagania Lapunowa: - $V(0, 0) = 0$, a ponadto jest dodatnio określona w znacznej części pozostałego obszaru płaszczyzny $(x, y) = (x_1, x_2)$. Przebieg zmian wartości tej funkcji jest pokazany na Rys. 3. Widok na Rys. 3a) jest obrócony w celu ukazania jej przebiegu w pobliżu miejsc zerowych funkcji.



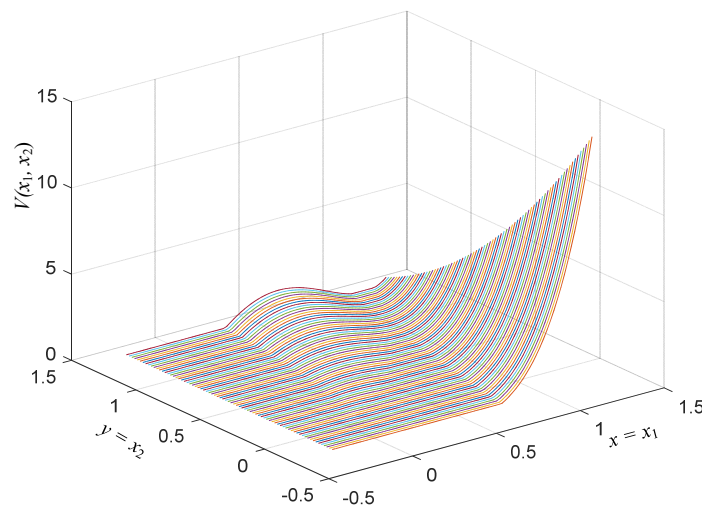
Rys. 3. Przebieg zmian funkcji Lapunowa (3): w przedziale $V = (0, 1)$ (a) oraz w zawężonym przedziale $V = (0, 0,0325)$ (b)

Rys. 3b) obrazuje przebieg tej funkcji po wyodrębnieniu obu lokalnych minimów związanych z wartościami zerowymi w punktach $(x_1, x_2) = (0, 0)$ – obszar stabilny oraz $(x_1, x_2) = (1, 1)$ – obszar niestabilny, w przedziale $V = (0, 0,0325)$.

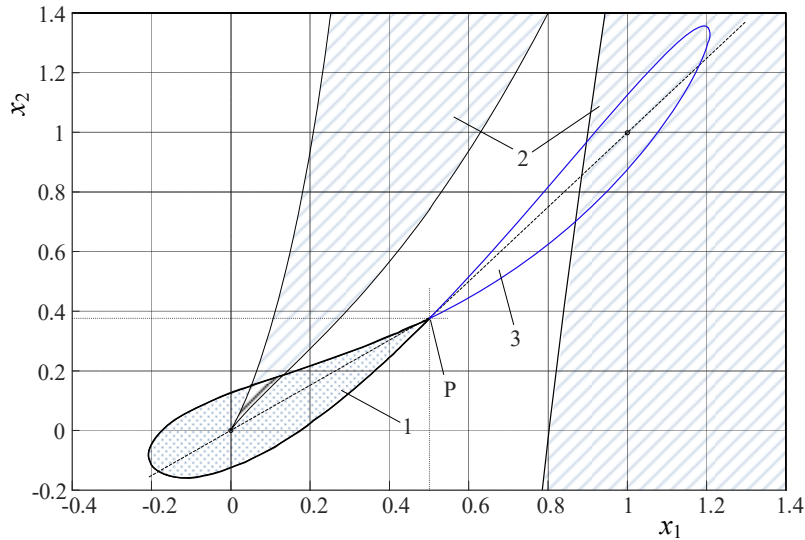
Pochodną funkcji Lapunowa obliczamy według znanej zależności:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) &= \frac{dV(x_1, x_2)}{dt} = \left[\frac{dV(x_1, x_2)}{dx_1} \quad \frac{dV(x_1, x_2)}{dx_2} \right] \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4x_1^3 - 4x_1x_2 + 2(x_1 - x_2) & -2x_1^2 + 4x_2 - 2x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^2 - x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix} \\ &= 4x_1^5 - 8x_1^3x_2 + 4x_1x_2^2 - 2x_2^2 - 2x_1^2 - 4x_1x_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Obszar ujemnych wartości funkcji (4) można wyznaczyć przez zbadanie zależności: $\dot{V}(x_1, x_2) < 0$ (Rys. 4). Granice obszarów związanych z wartościami dodatnimi funkcji Lapunowa ($V(x_1, x_2) > 0$) oraz ujemnymi wartościami jej pochodnej względem czasu, są pokazane na Rys. 5.



Rys. 4. Przebieg zmian wartości pochodnej funkcji Lapunowa względem czasu (płaski obszar odnosi się do ujemnych wartości funkcji)



Rys. 5. Granice obszarów związanych z dodatnimi wartościami funkcji Lapunowa (1, 3) oraz ujemnymi wartościami jej pochodnej względem czasu (2)

Zgodnie z twierdzeniem Lapunowa, obszar stabilności asymptotycznej powinien spełniać trzy warunki:

- $V(0, 0) = 0$,
- $V(x_1, x_2) > 0$,
- $\dot{V}(x_1, x_2) < 0$,

przy czym w obszarach związanych z ostatnimi dwoma warunkami nie może występować wartość zerowa funkcji.

W związku z ostatnią uwagą, z rozważań na temat stabilności badanej funkcji należy usunąć obszar 3 na Rys. 5 (obszar związany z niestabilnym punktem równowagi $(x_1, x_2) = (1, 1)$). Wobec tego, przyjęta funkcja $V(x_1, x_2)$ (3) jest ograniczona do obszaru 1 na Rys. 5 z pominięciem niewielkiego klina związanego z nakładającym się obszarem nieujemnych wartości pochodnej funkcji Lapunowa względem czasu: $\dot{V}(x_1, x_2) \geq 0$. Zauważmy, że w niezakreskowanych obszarach na Rys. 5 pochodna funkcji Lapunowa przyjmuje ujemne wartości, jednak tylko w obszarze 1 sama funkcja spełnia warunki odpowiednie do stabilności rozważanego układu.

Uwagi:

- Granice poszczególnych obszarów funkcji Lapunowa oraz jej pochodnej mogą być wyznaczone przez analizę zmiany znaku (wartości 0) funkcji $\dot{V}(x_1, x_2)$ oraz przekroju funkcji $V(x_1, x_2)$ na poziomie V_{rm} , który zachodzi w punkcie P (Rys. 5). Na podstawie (3) otrzymamy:

$$V(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 = x_1^4 - 2x_1^2x_2 + x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 = V_{rm} \quad (5)$$

Można sprawdzić, że funkcja (3) w punkcie P (Rys. 5) ma lokalne maksimum o wartości V_{rm} , które można obliczyć z warunku zerowania się parametru Δ , jeśli równanie (5) rozpatrywać jako równanie kwadratowe względem zmiennej x_2 :

$$2x_2^2 - 2x_2(x_1^2 + x_1) + x_1^2(x_1^2 + 1) - V_{rm} = 0,$$

$$\Delta = 4x_1^2(x_1 + 1)^2 - 8x_1^2(x_1^2 + 1) + 8V_{rm} = 0, \text{ co jest warunkiem pojedynczej wartości } x_2,$$

skąd dla $x_1 = 0,5$ otrzymamy:

$$V_{rm} = \frac{1}{2}(x_1^4 + x_1^2 - 2x_1^3)_{x_1=0,5} = \frac{1}{32} = 0,03125.$$

Przekrój funkcji $V(x_1, x_2)$ na poziomie V_{rm} wyznacza granice rozłącznych obszarów w kształcie charakterystycznego motylka na Rys. 5, z których jeden jest związany z niestabilnym punktem równowagi $(1, 1)$, a drugi z punktem $(0, 0)$.

W podobny sposób można wyznaczyć granice obszarów związanych z ujemną wartością pochodnej funkcji Lapunowa względem czasu. W tym przypadku podstawą analizy jest równanie (4), które przyrównane do zera rozdziela stabilne i niestabilne obszary w zakresie wartości pochodnej funkcji Lapunowa:

$$\dot{V}(x_1, x_2) = 4x_1^5 - 8x_1^3x_2 + 4x_1x_2^2 - 2x_2^2 - 2x_1^2 - 4x_1x_2 = 0 \quad (6)$$

Zapisując (6) względem jednej współrzędnej (np. x_2) uzyskujemy możliwość wyznaczenia konturu rozgraniczającego krytyczne obszary pochodnej przez rozwiązanie równania:

$$(2x_1 - 1)x_2^2 - 2x_1(2x_1^2 - 1)x_2 + x_1^2(2x_1^3 - 1) = 0,$$

dla którego:

$$\Delta = 2x_1 (2x_1 (x_1 - 1))^2$$

oraz:

$$x_{21} = \frac{2x_1 \left((2x_1^2 - 1) + (x_1 - 1)\sqrt{2x_1} \right)}{2x_1 - 1},$$

$$x_{22} = \frac{2x_1 \left((2x_1^2 - 1) - (x_1 - 1)\sqrt{2x_1} \right)}{2x_1 - 1}.$$

Powyższe wyrażenia tworzą parę funkcji $x_2 = f(x_1)$, które na Rys. 5 wyznaczają obszary 2 (zakreskowane pola odpowiadają dodatnim wartościom funkcji (6)). Niezakreskowane pola łączą się z ujemnymi wartościami tej pochodnej, co na Rys. 4 odpowiada płaskiej części przebiegu funkcji $\dot{V}(x_1, x_2)$.

- Druga (bezpośrednia) metoda Lapunowa formułuje dostateczne warunki stabilności układu (a nie konieczne), co oznacza, że uzyskane warunki stabilności związane z zaproponowaną funkcją Lapunowa nie muszą być spełnione aby badany układ był stabilny. Pokazuje to powyższy przykład: na podstawie portretu fazowego z Rys. 2 widać, że badany układ jest stabilny w znacznie większym obszarze niż wskazuje na to obszar 1 uzyskany na Rys. 5. Funkcja Lapunowa V nie jest jednoznaczna i sposób jej definicji może być bardzo różny, co komplikuje praktyczne zastosowanie tej metody.

- Podstawowe wykresy prezentowane powyżej zostały uzyskane w rezultacie uruchomienia procedur zawartych w pliku `Przyk_11_7_1.m`.

Zadania dodatkowe.

Funkcja Lapunowa zazwyczaj jest definiowana w postaci funkcji znanej jako forma kwadratowa. Niekiedy dobre rezultaty w tym zakresie można uzyskać przez jej utworzenia na bazie sumy kwadratów kolejnych zmiennych stanu. Dla analizowanego powyżej układu (1) sprawdzić następujące propozycje definicji funkcji Lapunowa:

a) $V(x, y) = (\dot{y})^2 + y^2 = (x - y)^2 + y^2$

b) $V(x, y) = (\ddot{y})^2 + (\dot{y})^2 = (x^2 - x)^2 + (x - y)^2$

Powtórzyć dla tych proponowanych funkcji wykonane powyżej analizy.